

N° 1

40. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \rightarrow & x^2 + 1 & \rightarrow & \sqrt{x^2 + 1}. \end{array}$$

2. Comme $x^2 + 1 > 0$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f = \mathbb{R}$.

N°2

45. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{e^x + 1}{x} & \mapsto & \sqrt{\frac{e^x + 1}{x}} \end{array}$$

2. Comme $\frac{e^x + 1}{x} > 0$ ssi $x > 0$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

N° 3

116. 1. $g'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$. Le dénominateur est

« un carré » donc positif sur $\mathbb{R}$. $g'(x)$ est donc du signe du numérateur $-4x$. Or $-4x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Donc $g'(x)$ est négatif si et seulement si x est positif et $g'(x)$ est positif si et seulement si x est négatif. On en déduit que g est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

2. La tangente $\mathcal{T}$ a pour équation

$$y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1), \text{ c'est-à-dire } y = x + 2.$$

$$\begin{aligned} 3. g(x) - (x + 2) &= \frac{-x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-x(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-x(x + 1)^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$ et $(x + 1)^2 \geq 0$. Donc le signe sur $\mathbb{R}$ de $g(x) - (x + 2)$ est le même que celui de $-x$. Donc $g(x) - (x + 2) \geq 0$ sur $]-\infty; 0]$ et $g(x) - (x + 2) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$ sur $]-\infty; 0]$ et $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{T}$ sur $[0; +\infty[$.

N° 4

61. 1. Schéma de composition de la fonction f .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & x^3 - 1 & \rightarrow & \sqrt{x^3 - 1}. \end{array}$$

2. f existe ssi $x^3 - 1 \geq 0$ ssi $x^3 \geq 1$ ssi $x \geq 1$ donc $D_f = [1; +\infty[$.

3. $g'(x) = 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voici son tableau de variations.

x	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de g		

4. On en déduit le tableau de variations de f .

x	1	$+\infty$
Variations de f		

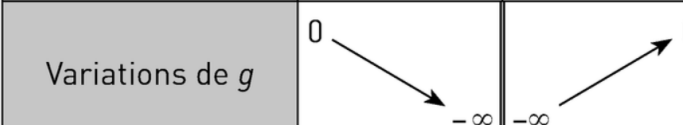
N°5

64. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{x^2} & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$$

2. $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

3. $g'(x) = \frac{2}{x^3}$ donc $g'(x) > 0$ ssi $x > 0$ donc g est croissante sur $]0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-		+
Variations de g			

4. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-		+
Variations de f	$\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 0 \end{array}$		$\begin{array}{c} 0 \\ \nearrow \\ 1 \end{array}$

N°6

$$58. f'(x) = 3(-4e^{-x})(4e^{-x} + 1)^2 = -12e^{-x}(4e^{-x} + 1)^2$$

N°7

$$55. f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}$$

N°8

65. f est concave sur $[-2; -1]$ et convexe sur $[-1; +\infty[$.

N°9

72. f' est croissante sur $]-\infty; 6]$ et f' est décroissante sur $[6; +\infty[$ donc f est convexe sur $]-\infty; 6]$ et f est concave sur $[6; +\infty[$.

N°10

74. f est concave sur $\left]-\infty; 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[2 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$ et f est convexe sur $\left[2 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

N°11

$$86. 1. f'(x) = -\left(x + \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)e^{-x}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } x \in \left[-\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right] \text{ donc } f \text{ est}$$

croissante sur $\left[-\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right]$ et décroissante sinon.

$$2. a) f''(x) = (x - 1)(x + 4)e^{-x}$$

$$b) f''(x) \geq 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[\text{ et } f''(x) \leq 0 \text{ ssi } x \in [-4; 1].$$

$$\text{De plus } f(-4) = -4e^4 \text{ et } f(1) = \frac{16}{e}.$$

N°12

1) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 10.$$

Étudions les signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction affine.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 10 = 0 \Leftrightarrow 6x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
signes de $f''(x)$	-	0	+

$a: 6 > 0$

Sur $]-\infty; \frac{5}{3}]$, $f''(x) \leq 0$ donc la fonction f est concave.

Sur $[\frac{5}{3}; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ donc la fonction f est convexe.

2) La fonction f'' s'annule en changeant de signe en $x = \frac{5}{3}$.

Donc la courbe représentative de f admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{5}{3}; f\left(\frac{5}{3}\right)\right)$.

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 4 \times \frac{5}{3} + 3 = \frac{125}{27} - \frac{125}{9} + \frac{20}{3} + 3 = \frac{125 - 375 + 1000 + 81}{27} = \frac{831}{27} = \frac{277}{9}$$

Le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(\frac{5}{3}; \frac{277}{9}\right)$.

N°13

1) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

Étudions les signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

$f''(x)$ est un polynôme du second degré ayant pour racines 0 et 1.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
signes de $f''(x)$	+	0	-	0	+

$a = 12 > 0$
signe de a à l'extérieur des racines.

Sur $]-\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$, donc la fonction f est convexe.

Sur $[0; 1]$, $f''(x) \leq 0$, donc la fonction f est concave.

Sur $]-\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$, donc la fonction f est convexe.

Sur $[0; 1]$, $f''(x) \leq 0$, donc la fonction f est concave.

2) La fonction f' s'annule en changeant de signe en $x=0$ et en $x=1$. Donc la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion de coordonnées $(0; f(0))$ et $(1; f(1))$.

$$f(0) = 0^4 - 2 \times 0^3 + 120 \times 0^2 + 3 = 3$$

$$f(1) = 1^4 - 2 \times 1^3 + 120 \times 1^2 + 3 = -118$$

Les points d'inflexion ont pour coordonnées $(0; 3)$ et $(1; -118)$.

N°14

1) La fonction f est dérivable sur $[0; 5]$ comme fonction polynôme.

$$\text{Pour tout } x \in [0; 5], \quad f'(x) = 0,125 \times 3x^2 - 0,75 \times 2x$$

$$= 0,375x^2 - 1,5x$$

2) Pour déterminer les tangentes horizontales de f , on cherche les valeurs de x qui annulent $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,375x^2 - 1,5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(0,375x - 1,5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 0,375x - 1,5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1,5}{0,375} = 4.$$

Sur $[0; 4]$, la courbe Γ_f admet donc deux tangentes horizontales, en $x=0$ et $x=4$.

3) Étudions les signes de $f'(x) = 0,375x^2 - 1,5x$ sur $[0; 4]$.
C'est une fonction du second degré ayant pour racines 0 et 4.

x	0	4	5	
signes de $f'(x)$	0	-	0	+

$a = 0,375 > 0$
signe de a à l'extérieur des racines

Variations de f

$$f(0) = 0,125 \times 0^3 - 0,75 \times 0^2 + 4 = 4$$

$$f(4) = 0,125 \times 4^3 - 0,75 \times 4^2 + 4 = 0$$

$$f(5) = 0,125 \times 5^3 - 0,75 \times 5^2 + 4 = 0,875$$

4) La fonction f' est dérivable sur $[0; 5]$ comme fonction polynôme.

$$\text{Pour tout } x \in [0; 5], \quad f''(x) = 0,375 \times 2x - 1,5$$

$$= 0,75x - 1,5$$

Étudions les signes de $f''(x) = 0,75x - 1,5$ sur $[0; 5]$.

$$0,75x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow 0,75x = 1,5 \Leftrightarrow x = \frac{1,5}{0,75} = 2.$$

x	0	2	5	
signes de $f''(x)$	-	0	+	$a = 0,75 > 0$

La fonction f'' s'annule en changeant de signe en $x=2$.

Donc Γ_f possède un point d'inflexion de coordonnées $(2; f(2))$.

$$f(2) = 0,125 \times 2^3 - 0,75 \times 2^2 + 4 = 2$$

I a pour coordonnées $I(2; 2)$.

5) La tangente à Γ_f au point d'abscisse 2 a pour équation

$$y = f'(2)(x-2) + f(2).$$

$$f(2) = 2 \text{ et } f'(2) = 0,375 \times 2^2 - 1,5 \times 2 = -1,5.$$

Donc la tangente a pour équation :

$$y = -1,5(x-2) + 2$$

$$y = -1,5x + 3 + 2$$

$$y = -1,5x + 5$$

6) Sur $[0; 2]$, $f''(x) \leq 0$ donc la fonction f est concave.

Sur $[0; 2]$, la courbe Γ_f est donc en dessous de ses tangentes.

Sur $[2; 5]$, $f''(x) \geq 0$ donc la fonction f est convexe.

Sur $[2; 5]$, la courbe Γ_f est donc au dessus de ses tangentes.

On en déduit, pour T :

Γ_f est en dessous de T sur $[0; 2]$.

Γ_f est au dessus de T sur $[2; 5]$.