

Pour s'entraîner séance Labomep démontrer seuil et limites

Manuel page 129 capacité 1 et capacité 2 page 131 capacités 3 et 4 page 133 capacité 5

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4$

1. Pour tout réel $A > 0$, déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$
2. En déduire la limite de la suite (u_n)

Soit A un réel, $A > 0$

$$u_n > A \Leftrightarrow n^2 - 4 > A$$

$$\Leftrightarrow n^2 > A + 4$$

$$\Leftrightarrow n > \sqrt{A + 4}$$

On pose $n_0 = E(\sqrt{A + 4}) + 1$

Alors pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > A$

Par définition de la limite d'une suite on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$

1. Conjecturer à la calculatrice la limite de la suite (u_n)
2. Ecrire un programme Python donnant le plus petit entier naturel n tel que $u_n < -10\,000$
3. Déterminer cet entier.

La table de la calculatrice permet de conjecturer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

```
n=0
u=-1
while u>=-10000:
    u=3*u+1
    n=n+1
print(n)
```

Le plus petit entier tel que $u_n < -10000$ est $n_0 = 10$

Exercice 3 :

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) $u_n = n^2 + n - 5$

b) $v_n = n^2\sqrt{n} + 2$

c) $w_n = \frac{-1}{2n+5}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -5 = -5$$

Par addition $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n - 5) = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2\sqrt{n}) = +\infty$

Par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2\sqrt{n} + 2) = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -5 = -5$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 5 = +\infty$

Par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n-5} \right) = 0$

Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = 0$

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 10 \right) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1 + \frac{1}{n}} \right) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{5}{n} + 9}{-3 + \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -10 = -10$$

Par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 10 \right) = -10$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} \right) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

Par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 1$

Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 3$

	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{n} + 9 \right) = 9$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n^2} \right) = -3$ Par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{5}{n} + 9}{-3 + \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{9}{-3} = -3$
Exercice 5 : Pour chaque suite suivante, montrer que l'on a une forme indéterminée et lever l'indétermination à l'aide d'une factorisation a) $u_n = -n^3 + 2n^2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$ Donc on a une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ » $\forall n \in \mathbb{N}, -n^3 + 2n^2 = n^2(-n + 2)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n + 2) = -\infty$ Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 2n^2) = -\infty$	Exercice 6 : Déterminer la limite des suites a) $u_n = \frac{3n+1}{5n-2}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3n+1}{5n-2} = \frac{n(3+\frac{1}{n})}{n(5-\frac{2}{n})} = \frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{2}{n} \right) = 5$ Par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+1}{5n-2} \right) = \frac{3}{5}$ b) $v_n = \frac{2n}{1-n^2}$ $\forall n \geq 2, \frac{2n}{1-n^2} = \frac{2n}{n^2(\frac{1}{n^2}-1)} = \frac{2}{n(\frac{1}{n^2}-1)}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = -1$ Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = -\infty$ Par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n(\frac{1}{n^2}-1)} \right) = 0$ c) $w_n = \frac{3n+\sqrt{n}}{2n+3}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3n+\sqrt{n}}{2n+3} = \frac{n(3+\frac{\sqrt{n}}{n})}{n(2+\frac{3}{n})} = \frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{n}}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 3 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} \right) = 2$ Par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{3}{2}$
b) $v_n = n^2 - 3n + 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n + 1) = -\infty$ Donc on a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 3n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ Par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1$ Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$	

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sqrt{3n+1}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{n}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $3n+1 = n+2n+1$

$$\text{Donc } 3n+1 > n$$

Donc $\sqrt{3n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$u_n > \sqrt{n}$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Donc d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 8 :

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = (n+1)^2 + (-1)^n \times n$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n^2 + 2n + 1 + (-1)^n \times n$$

$$u_n = n^2 + 1 + n(2 - (-1)^n) \text{ et } 2 - (-1)^n > 0$$

$$\text{donc } u_n > n^2$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

Donc d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 9 :

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{4}{n+1}$$

En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer la limite de la suite (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{n+1}\right) = 2$$

Donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

Exercice 10 :

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = -n - \sin(n)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq -n + 1$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \text{ donc } -1 \leq -\sin(n) \leq 1$$

$$-1 - n \leq -n - \sin(n) \leq 1 - n$$

$$u_n \leq -n + 1$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n + 1 = -\infty$$

Donc d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Exercice 11 :

Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_n = -5 + \frac{\sin(n)}{n}$$

Déterminer la limite de la suite (v_n)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$-5 + \frac{-1}{n} \leq v_n \leq -5 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 - \frac{1}{n}\right) = -5 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{1}{n}\right) = -5$$

Donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$$

Exercice 12 :

Soit (w_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$w_n = 4 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Déterminer la limite de la suite (w_n)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$4 + \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq w_n \leq 4 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = 4 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 4$$

Donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 4$$

N°35 p 140

35 Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = -n^2 + 6 \cos n.$$

1. a. Donner un encadrement de $\cos(n)$.

b. En déduire que, pour tout entier n , $w_n \leq -n^2 + 6$

2. En déduire la limite de la suite (w_n) .

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-6 \leq 6 \cos(n) \leq 6$
 $-n^2 - 6 \leq -n^2 + 6 \cos(n) \leq 6 - n^2$

2.

N°66 p 143

66 1. Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n \geq 3n^2 - 1$ pour tout entier naturel n . Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \leq -5n$ pour tout entier naturel n .

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3. Soit (u_n) une suite telle que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 + 6 = -\infty$$

Donc d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

1. Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

