

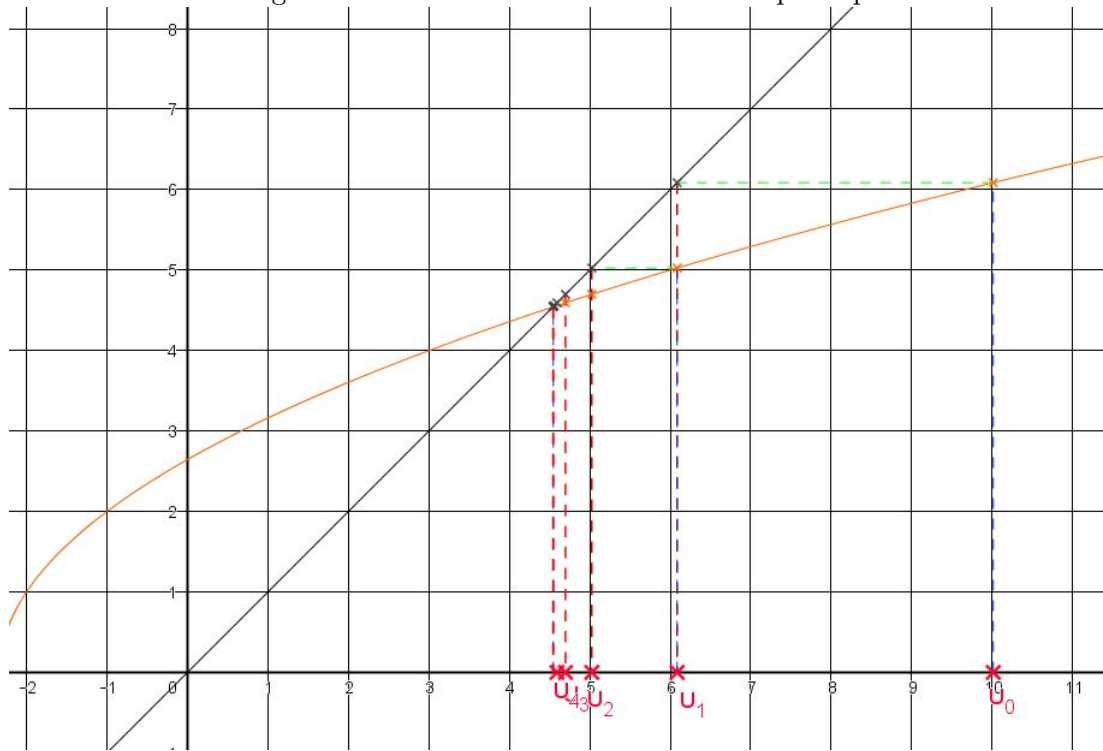
TD 1 : Geogebra Tableur

Correction

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 \times u_n + 7} \end{cases}$$

1. Ouvrir le fichier Geogebra TD 1 et exécuter la construction pas à pas



2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n)
La suite semble décroissante et converger vers 4,5 environ

3. Calculer dans un tableur les 25 premiers termes de la suite pour confirmer vos conjectures
Les résultats obtenus dans le tableur sont cohérents avec les réponses précédentes

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	6,08276253
4	2	5,024767417
5	3	4,69832973
6	4	4,592928172
7	5	4,558375206
8	6	4,546990831
9	7	4,543233704
10	8	4,541993077
11	9	4,54158334
12	10	4,541448009
13	11	4,54140331
14	12	4,541388547
15	13	4,54138367
16	14	4,54138206
17	15	4,541381528
18	16	4,541381352
19	17	4,541381294
20	18	4,541381275
21	19	4,541381268
22	20	4,541381266
23	21	4,541381265
24	22	4,541381265
25	23	4,541381265
26	24	4,541381265
27		

4. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante

Soit P_n la propriété : " $0 < u_{n+1} < u_n$ " pour $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 10$, et $u_1 = \sqrt{3u_0 + 7} = \sqrt{37}$ donc $0 < u_1 < u_0$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier quelconque fixé.

On suppose la propriété vraie au rang n , c'est à dire $0 < u_{n+1} < u_n$. (*hypothèse de récurrence*)

Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est à dire $0 < u_{n+2} < u_{n+1}$

Par hypothèse de récurrence on a : $0 < u_{n+1} < u_n$

Donc en multipliant par 3 : $0 < 3u_{n+1} < 3u_n$

Puis en ajoutant 7 : $7 < 3u_{n+1} + 7 < 3u_n + 7$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ Donc $\sqrt{7} < \sqrt{3u_{n+1} + 7} < \sqrt{3u_n + 7}$

Donc $0 < u_{n+2} < u_{n+1}$

La propriété est vraie au rang $n + 1$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc pour tout entier naturel $0 < u_{n+1} < u_n$ la suite est strictement décroissante et positive.

5. Utiliser un théorème du cours pour justifier la convergence de la suite

La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge

6. Déterminer la limite de la suite en utilisant l'unicité de la limite et l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$

Soit l la limite de la suite (u_n) on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$$

et par opération sur les limites on a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3l + 7}$$

Par unicité de la limite on obtient : $l = \sqrt{3l + 7}$ de plus $l > 0$ car tous les termes de la suite sont strictement positifs.

Donc $l^2 = 3l + 7 \Leftrightarrow l^2 - 3l + 7 = 0$ On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times (-7) = 37 > 0$

L'équation admet deux solutions, on choisit la solution positive donc $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$