

TD-2 Limites de fonctions

EXERCICE 1

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des polynômes suivants :

1. $P(x) = 5x^3 - 3x + 1$

2. $Q(x) = -2x^4 + x^2 + 3$

EXERCICE 2

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes puis déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

1. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$

2. $g(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}$

3. $h(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}$

4. $k(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x + 2}$

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$.

1. Tracer cette fonction sur votre calculatrice. Conjecturer alors les limites en $-\infty$, 1, 2 et $+\infty$. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [2; 5]$ et $y \in [-30; 30]$.

2. Démontrer ces conjectures.

EXERCICE 4

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{x - 1}$

1. On a représenté ci-contre la fonction f .

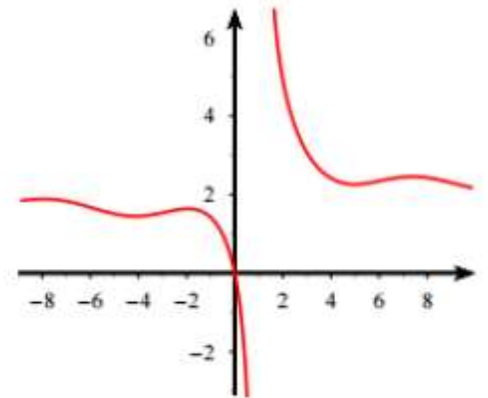
Conjecturer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$ et les limites à gauche et à droite de 1.

2.

a) Démontrer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ grâce à un encadrement.

b) Déterminer les limites à gauche et à droite de 1.

c) Interpréter graphiquement les limites obtenues.



EXERCICE 5

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$ en $-\infty$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $+\infty$

3. $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x$ en $-\infty$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$ en 1, $+\infty$ et $-\infty$

EXERCICE 6

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ en $x = 5$

2. $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ en $-\infty$

3. $f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$ en $-\infty$

4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $x = 1$

5. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$ en $+\infty$

6. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$ en $-\infty$

7. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$

EXERCICE 7

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2 - \cos(x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x \sin(x)$.