

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

Préciser la nature de chacune des séries suivantes et calculer la somme en cas de convergence.

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ | 6. $\sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$ | 10. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$ |
| 2. $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n}{n^2}$ | 7. $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-3n}$ | 11. $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{2^n}$ |
| 3. $\sum_{n \geq 1} e^{-n}$ | 8. $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{(n+1)!}$ | 12. $\sum_{n \geq 0} \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$ |
| 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!}$ | 9. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ | 13. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ |
| 5. $\sum_{n \geq 3} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ | | |

Exercice n° 2:

Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme quand c'est possible. On pourra laisser les résultats bruts sans les simplifier.

- $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 2}{3^n}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$
- $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
- $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice n° 3:

Montrer que les séries suivantes convergent :

- | | |
|---|---|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ | 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{n \arctan(n)}{e^n}$ |
| 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{2 + 4^n}$ | 5. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{2^n + 4^n}$ |
| 3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\sqrt{n} + (\sin(n))^2}$ | 6. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$ |

Exercice n° 4:

En utilisant des critères de négligeabilité, donner la nature des séries suivantes :

- $\sum_{n \geq 1} n e^{-\sqrt{n}}$
- $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n \ln(n)}}$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n^3}$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{(n+1)!}$

Je me perfectionne !

Exercice n° 5:

Soit $x \in \mathbb{R}$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 x^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice n° 6:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Exercice n° 7:

Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré ?} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice n° 8:

Pour tout entier N non nul, on pose $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$

1. Ecrire en Python une fonction `somme` qui prend en argument un entier naturel N non nul et renvoie la valeur de S_N .
2. Calculer S_2, S_4 et S_6 . Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variations de la suite $(S_{2N})_{N \geq 1}$?
3. Montrer que les suite $(S_{2N})_{N \geq 1}$ et $(S_{2N+1})_{N \geq 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. Ecrire en Python une fonction `valeurapprochee` qui prend en argument un nombre ϵ strictement positif et renvoie la plus petite valeur N et la valeur de S_N correspondante telles que $|S_N - S_{N+1}| < \epsilon$
5. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{N-1} (-x)^k = \frac{1}{1+x} - (-1)^N \frac{x^N}{1+x}$$

6. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx$$

7. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx \leq \frac{1}{N+1}$$

8. Conclure que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et donner sa somme.

Exercice n° 9: démonstration de la valeur de la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{n^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n} dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos(x))^{2n} dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et J_0 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
4. En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$
6. En sommant pour n de 1 à N , montrer que :

$$\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = J_0 - \frac{4^N (N!)^2}{(2N)!} J_N$$

7. Nous allons montrer dans cette question que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{4^N (N!)^2}{(2N)!} J_N = 0$

(a) On pose $f : x \mapsto \frac{\pi}{2} \cos(x) - 1$.

Etudier la fonction f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et prouver qu'il existe un unique $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(\alpha) = 0$

(b) Montrer alors que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$.

(c) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*, J_N \leq \frac{\pi^2}{4} (I_N - I_{N+1})$.

(d) Montrer alors que pour tout $N \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{4^N (N!)^2}{(2N)!} J_N \leq \frac{\pi^3}{16(N+1)}$ et conclure.

8. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 10:

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

1. Démontrer que la série de terme général a_n converge.
2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.
 (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.
 (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$
 où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.
 (b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.
 (b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b.

Exercice n° 11:

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + n + 1}{4^n}$ converge et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n + 1}{n!}$ converge et calculer sa somme.
3. (a) Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.
 (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)(1 - \cos(\frac{1}{n}))}{\cos(e^{-n})}$.