

DE LA SUP VERS LA SPÉ

EXERCICE 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (1) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
- (2) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$;
- (3) $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
- (4) $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
- (5) $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

EXERCICE 2

- (1) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

- (2) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)dt.$$

EXERCICE 3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

EXERCICE 4

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

- (1) Démontrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \neq g(b)$.
- (2) On fixe $t \in [a, b]$, on pose $p = \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}$ et on considère la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - pg(x)$. Vérifier que $h(b) = h(t)$ et en déduire qu'il existe un nombre réel $c(t) \in]t, b[$ tel que

$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))}.$$

- (3) On suppose qu'il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \ell.$$

- (4) Application : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

EXERCICE 5

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $2^k = a^2 + b^2$, avec $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Démontrer que si N, a et b sont des entiers tels que $N = a^2 + b^2$ et N est un multiple de 4, alors a et b sont pairs.
- (2) En déduire que l'équation $2^{2n} = a^2 + b^2$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ n'admet pas de solutions.
- (3) Démontrer que l'équation $2^{2n+1} = a^2 + b^2$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ admet une unique solution que l'on précisera.

EXERCICE 6

Soit $a, b \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Démontrer que $\ln(a)/\ln(b)$ est irrationnel.

EXERCICE 7

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G :

- (1) $C(G) = \{x \in G; \forall y \in G, xy = yx\}$ ($C(G)$ s'appelle le centre de G) ;
- (2) $aHa^{-1} = \{aha^{-1}; h \in H\}$ où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G .
- (3) On suppose de plus que G est commutatif. On dit que x est un élément de torsion de G s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$. Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G .

EXERCICE 8

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G . Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

EXERCICE 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On note, pour $p < n$, u_p la somme des racines de $P^{(p)}$. Démontrer que $u_0, \dots, u_{n-1}$ forme une progression arithmétique.

EXERCICE 10

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel x .

- (1) Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
- (2) Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\overline{C}$.
- (3) En déduire qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

EXERCICE 11

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \quad \frac{X^m}{(X-1)^n} \qquad 2. \quad \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}$$

EXERCICE 12

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ admettant n racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Soient $A_1, \dots, A_n$ les points du plan complexe d'abscisses respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

- (1) Décomposer la fraction rationnelle P'/P en éléments simples.
- (2) Soit β une racine de P' , et soit B son image dans le plan complexe. Déduire de la question précédente que

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta - \alpha_j} = 0.$$

- (3) En déduire que B est un barycentre de la famille de points $(A_1, \dots, A_n)$, avec des coefficients positifs. Interpréter géométriquement cette propriété.

EXERCICE 13

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a ou de $a = \pm\infty$. Montrer que $e^f \sim_a e^g \iff \lim_a (f - g) = 0$. A-t-on $f \sim_a g \implies e^f \sim_a e^g$?

EXERCICE 14

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. On pose

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^n v_k,$$

et on suppose de plus que $V_n \rightarrow +\infty$. Démontrer que $U_n \sim_{+\infty} V_n$.

EXERCICE 15

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
4. $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$.

- (1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\tanh(x) < x$.
- (2) En déduire le tableau de variations de f . On précisera les limites aux bornes.
- (3) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \frac{\sinh u}{u}$.
- (4) En déduire que f admet au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

où a_0, a_1, a_2 sont des réels que l'on précisera.

- (5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.
- (6) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- (7) Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- (8) Déterminer un équivalent de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 17

- (1) Démontrer que la fonction $\sin$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- (2) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$$

est lipschitzienne.

EXERCICE 18

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

- (1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.
- (2) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
- (3) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
- (4) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

- (5) Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
- (6) Montrer que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ et en déduire que $I_{n+1} \sim_{+\infty} I_n$.
- (7) Montrer que $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 19

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (1) Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.
- (2) Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

EXERCICE 20

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

- (1) Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
- (2) Traiter le cas $\alpha < 1$.
- (3) On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
- (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
- (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
- (c) Conclure pour la série de terme général u_n , lorsque $\alpha = 1$.

EXERCICE 21

- (1) Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
- (2) En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
- (3) Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

EXERCICE 22

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$.

- (1) Montrer que la série de terme général w_n converge.
- (2) Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

EXERCICE 23

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

EXERCICE 24

Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et que $F \neq E$). Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

EXERCICE 25

Soit $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On pose, pour $k = 1, \dots, n$,

$$L_k = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (X - \alpha_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_k - \alpha_i)}.$$

Démontrer que $(L_k)_{k=1, \dots, n}$ est une base de E . Déterminer les coordonnées d'un élément $P \in E$ dans cette base.

EXERCICE 26

Pour $0 \leq k \leq n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 27

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sevs de E . Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

- (1) $F \cap G = \{0\}$;
- (2) $F + G = E$;
- (3) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

EXERCICE 28

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E . Soit $d : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- Si $F, F' \in \mathcal{S}$ sont tels que $F \cap F' = \{0\}$, alors $d(F + F') = d(F) + d(F')$;
- $d(E) = n$.

- (1) Soient $F, G \in \mathcal{S}$ avec $\dim(F) = \dim(G) = 1$. Démontrer que $d(F) = d(G)$.
- (2) En déduire que, pour tout $F \in \mathcal{S}$, $d(F) = \dim(F)$.

EXERCICE 29

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

EXERCICE 30

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

- (1) Démontrer que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
- (2) Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.
 - (a) Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est liée.
 - (b) Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.
- (3) En déduire que f est une homothétie.

EXERCICE 31

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- (1) Soit $k \geq 1$. Démontrer que $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.
- (2) (a) Démontrer que si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^{k+2})$.
 (b) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
 - si $k < p$, alors $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$;

– si $k \geq p$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$.

(c) Démontrer que $p \leq n$;

(3) Démontrer que si $k < p$, alors $\operatorname{Im}(f^k) \neq \operatorname{Im}(f^{k+1})$ et si $k \geq p$, alors $\operatorname{Im}(f^k) = \operatorname{Im}(f^{k+1})$.

(4) Démontrer que $\ker(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^p)$ sont supplémentaires.

(5) Démontrer qu'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que F et G sont supplémentaires, $f|_F$ est nilpotent et $f|_G$ induit un automorphisme de G .

(6) Soit $d_k = \dim(\operatorname{Im}(f^k))$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})$ est décroissante.

EXERCICE 32

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .

EXERCICE 33

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

EXERCICE 34

Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

EXERCICE 35

(1) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

(2) Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

EXERCICE 36

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) On suppose que $\operatorname{tr}(AA^T) = 0$. Que dire de la matrice A ?

(2) On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Démontrer que $A = B$.

EXERCICE 37

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ de signature égale à 1. $\mathcal{A}_n$ est appelé le groupe alterné d'indice n .

(1) Démontrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

(2) Énumérer tous les éléments de $\mathcal{A}_3$, de $\mathcal{A}_4$.

(3) On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\phi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

EXERCICE 38

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n nombres complexes et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A - xI_n)$.

EXERCICE 39

Démontrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

EXERCICE 40

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

(1) Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

(2) On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

EXERCICE 41

On considère $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

EXERCICE 42

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(1) Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

(2) Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^T AX = A^T B.$$

(3) Application : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

EXERCICE 43

Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E , on appelle matrice de Gram la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}$. On appelle déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \dots, x_p$, et on note $G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant de cette matrice.

(1) Démontrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.

(2) On suppose désormais que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre, et on note $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$. Soit également $x \in E$. Démontrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$

EXERCICE 44

Soit $1 \leq p \leq n$. On considère n boules et deux boîtes A et B . Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p - 1$ boules dans la boîte B . En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}.$$

Retrouver cette formule par le calcul.

EXERCICE 45

Démontrer par un dénombrement que, pour $n \geq 1$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

EXERCICE 46

Soit n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer par dénombrement que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

EXERCICE 47

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événement " m divise x ". On note également B l'événement " x est premier avec n ". Enfin, on note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n .

- (1) Exprimer B en fonction des A_{p_k} .
- (2) Pour tout entier naturel m qui divise n , calculer la probabilité de A_m .
- (3) Montrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
- (4) En déduire la probabilité de B .
- (5) Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n . Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

EXERCICE 48

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \right) - (n-1).$$

EXERCICE 49

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes, et suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On note $M = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- (1) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P(M \geq k)$.
- (2) En déduire la loi de M .
- (3) Soit A l'événement : " $\text{il existe } i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } X_i = 1$ ". Démontrer que $P(A) \geq 1 - \frac{1}{e}$.

EXERCICE 50

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$

EXERCICE 51

Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 , définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \dots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \dots, n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

- (1) Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
- (2) Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1 .
- (3) Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

EXERCICE 52

Soit X une variable aléatoire discrète finie prenant la valeur x_i avec probabilité p_i , pour $i = 1, \dots, n$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

avec la convention $x \ln x = 0$ si $x = 0$ (ce qui correspond au prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto x \ln x$).

- (1) Démontrer que $H(X) \geq 0$.
- (2) Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante, c'est-à-dire s'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p_i = 1$.
- (3) Vérifier que, pour tout $k = 1, \dots, n$, on a

$$(-np_k) \ln(np_k) \leq 1 - np_k$$

avec égalité si et seulement si $np_k = 1$.

- (4) En déduire que $H(X) \leq \ln n$.
- (5) Démontrer que $H(X) = \ln n$ si et seulement si X est équirépartie, ie si $p_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

EXERCICE 53

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$$

où $p_k = P(X = k)$.

- (1) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; une loi binomiale de paramètres n et p .
- (2) Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

-
- (3) Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- (4) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- (5) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

EXERCICE 54

Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

- (1) Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(a+t)^2}$.
- (2) En déduire que $P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}$.
- (3) Démontrer l'inégalité de Cantelli : $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + a^2}$. Comparer avec l'inégalité de Tchebychev.