

Exercice 1. (3pts)

n désigne un nombre entier relatif.

1. Démontrer que $n + 7$ divise $3n + 1$ si, et seulement si, $n + 7$ divise 20.
2. En déduire les valeurs de n telles que $n + 7$ divise $3n + 1$.

Exercice 2. (2pts)

n et k désignent deux nombres entiers naturels non nuls.

1. Justifier l'égalité :

$$1 + (4k + 1) + (4k + 1)^2 + \dots + (4k + 1)^{n-1} = \frac{(4k + 1)^n - 1}{4k}$$

2. En déduire que $(4k + 1)^n - 1$ est divisible par 4.
3. Justifier alors que $5^n - 1$ et $13^n - 1$ sont divisibles par 4.

Exercice 3. (10pts)

Un fumeur décide d'arrêter de fumer.

On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- S'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9.
- S'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On note p_n (resp. q_n) la probabilité de ne pas fumer (resp. de fumer) le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer. On suppose donc que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1 .
2. Justifier à l'aide d'un arbre de probabilité les relations suivantes :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,9p_n + 0,4q_n \\ q_{n+1} = 0,1p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $X_n = M^n X_0$.
5. On donne $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Démontrer que $M = A + 0,5B$.

6. Vérifier que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et calculer les produits AB et BA . On admettra dans la suite que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = A$ et $B^n = B$.
7. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $M^n = A + 0,5^n B$.
8. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.
9. A long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

Exercice 4. (6pts)

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On admet que pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer F^2 et F^3 . On pourra utiliser la calculatrice.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$, démontrer que :

$$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2$$

5. On donne $u_{12} = 144$.

Démontrer en utilisant la question 4. qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.

Donner la longueur des deux autres côtés.