

Exercice 1: (9pts)

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3. \end{cases}$$

1. a. Si $n=0$ alors $u_1 = 5 \times u_0 - 4 \times 0 - 3$

$$\underline{u_1 = 12} \quad 0,5$$

① Si $n=1$ alors $u_2 = 5 \times 12 - 4 \times 1 - 3$

$$\underline{u_2 = 53}, \quad 0,5$$

b. $\underline{u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique 0,5

① $\underline{\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}}$ donc (u_n) n'est pas géométrique 0,5

① c. $\underline{u_{10} = 19\,531\,261.}$ 0,5

2. a. Montrons par récurrence que:

$$S_n: "u_n \geq n+1".$$

Initialisation:

Si $n=0$ alors $0+1=1$ et $u_0=3$

$$\text{donc } u_0 \geq 1. \quad 0,5$$

S_0 est vraie.

Hypothèse:

On suppose S_n vraie au rang n . (H_n)

Heureux:

On veut montrer que: $u_{n+1} \geq n+2$.

D'après (H_n) , on a: $u_n \geq n+1$

$$\Leftrightarrow 5u_n \geq 5n+5, \quad 5 \geq 0$$

(2,5)

$$\Leftrightarrow 5u_n - 4n \geq n + 5$$

$$\Leftrightarrow 5u_n - 4n - 3 \geq n + 2 \quad 1$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq n + 2.$$

S_n est décroissante

Conclusion: $\forall n \geq 0, u_n \geq n + 1.$ 0,5

(0,5)

$$\begin{array}{l} \text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty \\ u_n \geq n+1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty \\ u_n \geq n+1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Par comparaison} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{array}$$

3. $\forall n \geq 0, v_n = u_n - n - 1.$

a. $\forall n \geq 0, v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = 5u_n - 5n - 5$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = 5(u_n - n - 1)$ 1

$\Leftrightarrow v_{n+1} = 5v_n.$

(1,5)

Donc (v_n) est géométrique de raison 5

et $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2.$ 0,5

(0,5) b. $\forall n \geq 0, v_n = 2 \times 5^n.$

(0,5) c. $\forall n \geq 0, u_n = v_n + n + 1 \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$

d. Calculons : $u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^{n+1} + n + 2 - 2 \times 5^n - n - 1$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^n (5 - 1) + 1$ 0,5

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 8 \times 5^n + 1$

(1)

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0.$

$\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n.$

$\Leftrightarrow (u_n) \text{ est croissante à partir de } 0.$ 0,5

Exercice 2:

(11pts)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (-5x^2 + 5)e^x.$$

1.a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$

Par somme 0,5
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 5 = -\infty$

Par produit 0,5
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 1

b. $f(x) = (-5x^2 + 5)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

($\Rightarrow$) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -5x^2 e^x + 5e^x.$ 0,25

2

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ (croissance comparée) 0,25

Par produit 0,5
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^2 e^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -5 = -5$

Par somme
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5e^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 0,5

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote au voisinage de $-\infty$.
horizontale 0,5

2.a. Calculons, $f(0) = (-5 \cdot 0^2 + 5)e^0 \Leftrightarrow f(0) = 5.$

Donc $A(0; 5) \in (Oy)$. 0,5

b. Résolvons: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (-5x^2 + 5)e^x = 0$

$\Leftrightarrow -5x^2 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow \underline{x = -1 \text{ ou } x = 1.}$ 0,5

O admet 2 antécédent -1 et 1.

On a: $B(-1; 0)$ et $C(1; 0)$. 0,5

3. a. f est la somme et le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -10x e^x + (-5x^2 + 5)e^x$$

$$\Leftrightarrow \underline{f'(x) = (-5x^2 - 10x + 5)e^x.} \quad 1$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de " $-5x^2 + 5 - 10x$." 0,5

Resolvons : $-5x^2 - 10x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 1 = 0$$

Calculons : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1$

$$\Delta = 8$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{-2}$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1 = -1 + \sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \underline{x_2 = -1 - \sqrt{2}} \quad 0,5$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1 \approx 0,41} \quad \text{ou} \quad \underline{x_2 \approx -2,41.}$$

Ici $a = -5 < 0$, on a : 0,25

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$		
Signe de $f'(x)$		-	ϕ	+	ϕ	-
Variation de f	0					

$\nearrow f(x_2) \quad \nearrow f(x_1) \quad \searrow -\infty$

avec $f(x_2) \approx -2,2$ et $f(x_1) \approx 6,2$.

4. a. $T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\Leftrightarrow \underline{T_0 : y = 5x + 5.} \quad 0,5$$

① b. Traçons T_0 : Il faut 2 points.

$$\underline{D(0; 5)} \quad \text{et} \quad \underline{E(-1; 0)} \quad 0,5$$

5.a. f' est la somme et le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x, & 0,5 \\ \Leftrightarrow f'(x) &= (-5x^2 - 20x - 5)e^x \\ \Leftrightarrow f''(x) &= \underline{- (5x^2 + 20x + 5)e^x}. & 0,5 \end{aligned}$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-(5x^2 + 20x + 5)$

Resolvons: $5x^2 + 20x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

Calculons: $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 1$

$$\Delta = 12.$$

$$x_3 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2}$$

$$\text{ou } x_4 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_3 = -2 - \sqrt{3}$$

$$\text{ou } x_4 = -2 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x_3 \approx -3,73.$$

$$\text{ou } x_4 \approx -0,27 \quad 0,5$$

Donc $a = -5 < 0$, on a:

$\forall x \in]-\infty; -2 - \sqrt{3}[$, f est concave

$\forall x \in]-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}[$, f est convexe 1

$\forall x \in]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$, f est concave.

Il y a 2 points d'inflexion pour $x = -2 - \sqrt{3}$ et pour $x = -2 + \sqrt{3}$ car la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

$$\underline{F(-2 - \sqrt{3}; \quad)} \text{ et } \underline{G(-2 + \sqrt{3}; \quad)} \quad 0,5$$