

Devoir :
Fonction et suite.

Exercice 1 : (9 points).

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 \end{cases}$$

1. a. Montrer que $u_1 = 12$ et calculer le terme u_2 .
b. A l'aide des trois premiers termes, montrer que (u_n) est ni géométrique et ni arithmétique.
c. A la calculatrice calculer u_{10} .
2. a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 0, u_n \geq n + 1$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \geq 0, v_n = u_n - n - 1$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme v_0 .
b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$.
d. En déduire la monotonie de la suite (u_n) .

Exercice 2 : (11 points).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-5x^2 + 5)e^x.$$

On note f' la fonction dérivée de f , et f'' la fonction dérivée seconde de f .

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan, donnée en **annexe**.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -5x^2 e^x + 5e^x$.
En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.
Donner une interprétation géométrique sur la courbe C_f .
2. a. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère fourni en **annexe**.
b. Démontrer que C_f coupe l'axe des abscisses en deux points B et C.
Déterminer leurs coordonnées et les placer dans le repère fourni en **annexe**.
c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-5x^2 - 10x + 5)e^x$.
d. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de variations de la fonction f et placer les limites étudiées dans la question 1.
3. Soit T_0 la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
a. Montrer que l'équation réduite de T_0 est : $y = 5x + 5$.
b. Tracer la droite T_0 dans le repère fourni en **annexe**.
Expliquer comment vous l'avez tracée.
4. a. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -(5x^2 + 20x + 5)e^x$.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Préciser les points d'inflexion à la courbe C_f .