

Correction du devoir maison n°1 : Suites et probabilités conditionnelles

Exercice 1 :

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1kg et de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.

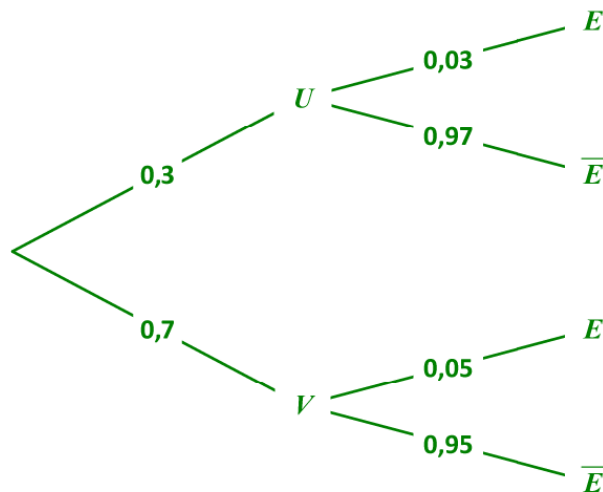
On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les événements suivants

- U : « le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U ».
- V : « le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V ».
- E : « le paquet porte le label extra fin ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V , sans mélanger les sucres des deux exploitations.

- a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



- b. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?

Les événements U et V forment une partition de l'univers. Donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(E) = P(U \cap E) + P(V \cap E)$$

$$P(E) = P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E)$$

$$P(E) = 0,3 \times 0,03 + 0,7 \times 0,05$$

$$P(E) = 0,044$$

Donc la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » est 0,044.

- c. Sachant que le paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

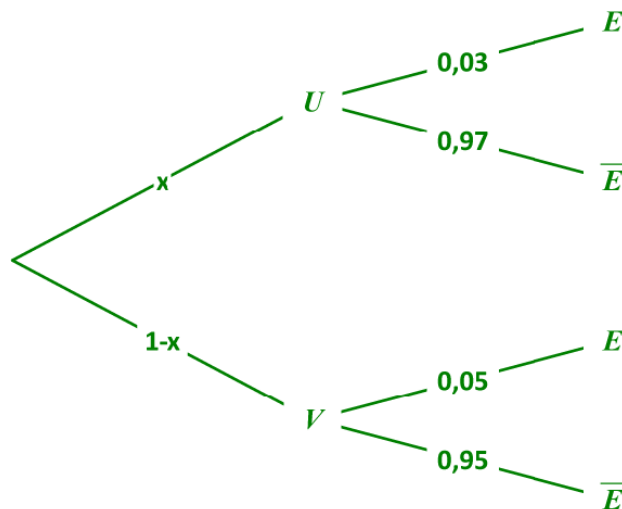
$$P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0,3 \times 0,03}{0,044} \approx 0,205$$

Donc, sachant que le paquet porte le label « extra fin », la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U est 0,205.

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que, parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U . Comment doit-elle s'approvisionner auprès des deux exploitations U et V ?

On pose $x = P(U)$

On peut alors représenter la situation par l'arbre pondéré suivant :



On veut déterminer x pour que $P_E(U) = 0,3$

$$\text{Or : } P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{x \times 0,03}{x \times 0,03 + (1-x) \times 0,05} = \frac{0,03x}{0,03x + 0,05 - 0,05x} = \frac{0,03x}{-0,02x + 0,05}$$

On est donc amené à résoudre l'équation $\frac{0,03x}{-0,02x + 0,05} = 0,3$

$$\frac{0,03x}{-0,02x + 0,05} = 0,3 \Leftrightarrow 0,03x = 0,3 \times (-0,02x + 0,05)$$

$$\Leftrightarrow 0,03x = -0,006x + 0,015$$

$$\Leftrightarrow 0,036x = 0,015$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0,015}{0,036}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 0,417$$

Donc, pour que 30 % du sucre « extra fin » proviennent de l'exploitation U , l'entreprise devra commander 41,7 % de son sucre dans l'exploitation U (et 58,3 % dans l'exploitation V).

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3, u_1=6$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2}=\frac{5}{4}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

$$u_2 = \frac{5}{4} \times u_1 - \frac{1}{4} \times u_0 = \frac{5}{4} \times 6 - \frac{1}{4} \times 3 = 6,75$$

$$u_3 = \frac{5}{4} \times u_2 - \frac{1}{4} \times u_1 = \frac{5}{4} \times 6,75 - \frac{1}{4} \times 6 = 6,9375$$

$$u_4 = \frac{5}{4} \times u_3 - \frac{1}{4} \times u_2 = \frac{5}{4} \times 6,9375 - \frac{1}{4} \times 6,75 \approx 6,9844$$

$$u_5 = \frac{5}{4} \times u_4 - \frac{1}{4} \times u_3 \approx \frac{5}{4} \times 6,9844 - \frac{1}{4} \times 6,9375 \approx 6,9961$$

2. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) semble être convergente et avoir pour limite 7.

3. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il prenne en entrée un entier $n \geq 2$ et renvoie la valeur de u_n .

```
1 def terme (n):  
2     u=3  
3     v=6  
4     for i in range(1,n):  
5         t = v  
6         v = (5/4)*v-(1/4)*u  
7         u = t  
8     return(v)
```

On se propose de démontrer la conjecture émise à la question 2. Pour cela, on considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ et $w_n = u_n - 7$

4. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite constante.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} - (u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n)$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

$$v_{n+1} - v_n = 0$$

Donc la suite (v_n) est une suite constante et $v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{1}{4} \times 3 = \frac{21}{4}$

- b. En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{21}{4} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$$

- c. En utilisant cette expression, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $u_n < u_{n+1} < 15$

Pour tout entier naturel n , on note $P(n): u_n < u_{n+1} < 15$

Initialisation : On a $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ d'où $u_0 < u_1 < 15$
donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque. On suppose que $P(n)$ est vraie.

Démontrons, sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$

On a $u_n < u_{n+1} < 15$

Donc, en multipliant chaque membre de l'inégalité par $\frac{1}{4}$ (qui est strictement positif),

on obtient : $\frac{1}{4}u_n < \frac{1}{4}u_{n+1} < \frac{15}{4}$

Puis, en ajoutant $\frac{21}{4}$ à chaque membre, on obtient : $\frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4}$

D'où $u_{n+1} < u_{n+2} < 9$

On a donc bien $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n .

- d. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

5. a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 7$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 7)$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}w_n$$

Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme

$$w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$$

- b. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

Pour tout entier naturel n , on a $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Donc, pour tout entier naturel n , on a $u_n = w_n + 7 = 7 - 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

c. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 = -4$ donc par produit, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 = 7$ donc par somme, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 - 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 7$

On en déduit que notre conjecture émise à la question 2 était juste : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$