

Devoir maison n°1 : Suites et probabilités conditionnelles

Exercice 1 :

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1kg et de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.

On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les événements suivants

- U : « le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U ».
- V : « le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V ».
- E : « le paquet porte le label extra fin ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V , sans mélanger les sucres des deux exploitations.
 - a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
 - b. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?
 - c. Sachant que le paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?
2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que, parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U . Comment doit-elle s'approvisionner auprès des deux exploitations U et V ?

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3, u_1=6$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2}=\frac{5}{4}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.
2. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?
3. Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier $n \geq 2$ et renvoie la valeur de u_n .

```
1 def terme (n):  
2     u=3  
3     v=6  
4     for i in range(..., ...):  
5         t = v  
6         v = ...  
7         u= ...  
8     return(v)
```

On se propose de démontrer la conjecture émise à la question 2. Pour cela, on considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$ et $w_n=u_n-7$

4. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite constante.
b. En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n
c. En utilisant cette expression, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $u_n < u_{n+1} < 15$
d. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?
5. a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b. En déduire une expression de u_n en fonction de n .
c. Démontrer la conjecture émise à la question 2.