

DM numéro 2 - Corrigé

Exercice 1

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3} .

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

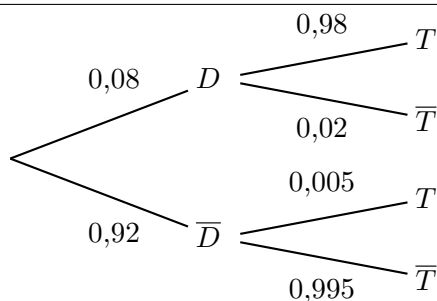
- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08 .

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.



2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

D et $\bar{D}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(D \cap T) + P(\bar{D} \cap T) \\
 &= P(D) \times P_D(T) + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(T) \\
 &= 0,08 \times 0,98 + 0,92 \times 0,005 \\
 &= 0,0784 + 0,0046 = 0,083
 \end{aligned}$$

3. a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

$$P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445, \text{ soit } 0,945 \text{ au millième près.}$$

- b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95 .

Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

D'après la question précédente $P_T(D) = 0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103 .

1. Dans cette question 1., on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

- a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.

On reconnaît un schéma binomial.

Épreuve : choisir un athlète

Succès : l'athlète est contrôlé positif de probabilité $p = 0,103$.

La variable aléatoire X est le nombre de succès à l'issue de $n = 5$ épreuves identiques et indépendantes.

Donc X suit la loi binomiale $B(5, 0,103)$.

Autrement dit, $\forall k \in \llbracket 0 ; 5 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{5}{k} (0,103)^k (0,897)^{5-k}$

- b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$E(X) = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

- c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{5}{0} (0,103)^0 (0,897)^5 \\ &\approx 0,419 \end{aligned}$$

Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est : 0,419 au millièmes près.

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

On a pour n athlètes contrôlés,

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$$

On a $0,897^{12} \approx 0,271$ et $0,897^{13} \approx 0,243$.

On doit contrôler au minimum **13** athlètes.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x^2-1}.$$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$
 Donc par limite de composée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2-1} = +\infty$
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 Donc par limite de produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$
 Donc par limite de composée : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-1} = +\infty$
 Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
 Donc par limite de produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. Déterminer le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'après la formule de dérivation d'un produit :

$\forall x \in \mathbb{R},$

$$f'(x) = 1 \times e^{x^2-1} + x \times (2xe^{x^2-1}) = (2x^2 + 1) e^{x^2-1}$$

Pour tout réel x , $2x^2 + 1 > 0$ et $e^{x^2-1} > 0$ donc $f'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variation de f	$-\infty$	$+\infty$

3. Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

f' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout réel x , $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$.

$f''(x)$ est du signe de x sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 3 > 0$ et $e^{x^2-1} > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Convexité de f	concave		convexe

f est convexe sur $]0, +\infty[$

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x(1 - e^{x^2-1}).$$

- a. Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1; 1]$.

On résout l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$:

$$\begin{aligned} 1 - e^{x^2-1} \geq 0 &\iff e^0 \geq e^{x^2-1} \\ &\iff 0 \geq x^2 - 1 && \text{(la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{)} \\ &\iff 0 \geq (x-1)(x+1) \\ &\iff -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ est donc l'intervalle $[-1; 1]$.

- b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.

Sur l'intervalle $[-1; 1]$, $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ donc

$h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$ a le signe de x sur $[-1; 1]$:

$h(x) < 0$ sur $] -1; 0[$

$h(x) > 0$ sur $]0; 1[$;

De plus $h(-1) = h(0) = h(1) = 0$.

- c. En remarquant que pour tout réel x , on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

$h(x) = x - f(x) \geq 0$ sur $]0; 1[$, donc sur cet intervalle la droite D d'équation $y = x$ est située au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f .

5. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1}$ est une primitive de f .

F est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2-1} = f(x)$