
DM numéro 2

Exercice 1

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3} .

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08 .

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3.
 - a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
 - b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95 .
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103 .

1. Dans cette question 1., on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
 - a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
 - b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x^2-1}.$$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
2. Déterminer le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x(1 - e^{x^2-1}).$$

- a. Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 ; 1]$.
 - b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
 - c. En remarquant que pour tout réel x , on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
5. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1}$ est une primitive de f .