

Rappels sur les suites. Algorithme

Généralités sur les suites

EXERCICE 1

La suite (u_n) est telle que : $u_0 = 1$ et pour tout n , $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

- 1) Calculer à la main u_1, u_2, u_3 . Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n .
- 2) Écrire un algorithme en pseudo code puis une fonction $u(n)$ en Python  donnant le terme u_n , n étant donné. Donner alors les valeurs de u_5, u_{10} et u_{15} .
- 3) Modifier cette fonction $u(n)$ pour qu'elle donne les termes de u_1 à u_{10} .

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2, & u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

- 1) Calculer à la main les termes u_2, u_3 et u_4 .
- 2) Écrire une fonction $u(n)$ en Python  donnant le n -ième terme de la suite. Donner $u(6)$ et $u(10)$.

Variation d'une suite

EXERCICE 3

Déterminer les variations des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

- 1) $u_n = -3n + 1$
- 2) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
- 3) $u_n = 2^n$
- 4) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

EXERCICE 4

Montrer que la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq 2$: $u_n = \frac{n^2}{n!}$

$n!$ = factorielle n et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

EXERCICE 5

Déterminer les variations des suites suivantes :

- 1) $u_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad n \geq 4$
- 2) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 6

Montrer que la suite suivante est décroissante : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - n$

EXERCICE 7

Vrai-Faux

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

1) Proposition 1 :

Si (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors la suite $w_n = u_n + v_n$ est croissante.

2) Proposition 2 :

Si (u_n) et (v_n) sont croissantes alors la suite $t_n = u_n \times v_n$ est croissante.

Suites arithmétiques et géométriques**EXERCICE 8**

(u_n) est une suite arithmétique de raison r .

- 1) Exprimer u_n en fonction de n si $u_0 = 2$ et $r = \frac{1}{2}$
- 2) $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$. Calculer u_{20}
- 3) $u_1 = -2$ et $r = 3$. Calculer u_{20} puis $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$
- 4) $u_0 = -3$ et $r = -2$. Calculer u_{25} et u_{125} puis $S = u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$

EXERCICE 9

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$

- 1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 .

Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n .

- 2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$ est arithmétique.
- 3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

EXERCICE 10

(u_n) est une suite géométrique de raison q .

- 1) $u_1 = 5$ et $q = \frac{2}{3}$. Exprimer u_n en fonction de n
- 2) $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$. Calculer q puis u_{14}
- 3) $q = 2$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12} = 24\,573$. Calculer u_0 .

EXERCICE 11

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ est géométrique.

La suite (u_n) converge-t-elle?

EXERCICE 12

Calculer les sommes suivantes puis vérifier votre résultat à l'aide d'un algorithme :

- 1) $A = 5 + 11 + 17 + \dots + 2015 + 2021$
- 2) $B = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 10$
- 3) $C = 0,01 - 0,06 + 0,36 - 2,16 + \dots + 16\,796,16$

Suites arithmético-géométriques et homographique**EXERCICE 13**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 6$

- 1) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) Étudier la convergence de la suite (u_n) .

EXERCICE 14

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n \end{cases}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 13u_n - 4$

- 1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et de a .

EXERCICE 15

Dans une réserve, une population initiale de 1 000 animaux évolue ainsi :

- 20 % des animaux disparaissent chaque année (bilan naissances et décès)
- 120 animaux par an sont introduit dans la réserve.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, p_n la population d'animaux l'année n . Ainsi $p_0 = 1\,000$. Le but est de déterminer l'évolution de cette population au bout de n années.

- 1) a) Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n .
b) Conjecturer graphiquement à l'aide d'une calculatrice, l'évolution de la population. On reportera les 5 premiers termes sur l'axes des abscisses.
- 2) Soit la suite, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = p_n - 600$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - b) Déterminer alors l'expression de v_n puis p_n en fonction de n .
 - c) La suite p_n admet-elle une limite en $+\infty$? Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 16

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

- 1) On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n) .

Autres suites**EXERCICE 17**

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + n \end{cases} \quad (\text{R})$$

- 1) Déterminer une suite arithmétique (w_n) satisfaisant la relation (R).
- 2) On pose $v_n = u_n - w_n$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et v_0 .
- 3) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- 4) a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.
b) Programmer la suite (u_n) et vérifier les limites trouvées.

EXERCICE 18**Suite récurrence à deux termes**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

- 1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. En déduire v_n en fonction de n .
- 3) Soit la suite (w_n) définie par tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
 - b) Exprimer w_n puis u_n en fonction de n .
- 4) Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

Programmer $S(n)$ en Python  permettant de calculer S_n pour $n \geq 2$.

Donner alors les valeurs approchées à 10^{-4} de S_6 , S_{10} et S_{50} .

Quelle conjecture sur la convergence de la suite (S_n) peut-on faire ?

Remarque : On montre par récurrence que $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ (Chap 2).

EXERCICE 19**Extrait national 2009**

Soit la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n \geq 1$:
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \end{cases}$$

On obtient les premiers termes suivants :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

- Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10} .
- Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (w_n) ?
En supposant cette conjecture vraie, calculer w_{2021} .

EXERCICE 20**Somme des carrés**

- Déterminer un polynôme P du 3^e degré tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = x^2$
- Compléter les égalités

$$\begin{aligned} P(1) - P(0) &= \\ P(2) - P(1) &= \\ P(3) - P(2) &= \\ \dots &\dots \\ P(n+1) - P(n) &= \end{aligned}$$
- En déduire alors la formule de la somme des carrés.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Algorithme**EXERCICE 21**

On donne la fonction $f(n)$ en Python .

- Justifier que $f(3)$ renvoie (11, 21).
- Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u				11		
S				21		

```
def f(n):
    u=1 ; s=1 ; i=0
    while i<n:
        u=2*u+1-i
        s=s+u
        i=i+1
    return u, s
```

Soit (u_n) et (S_n) définies par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \end{cases} \text{ et } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1					
$u_n - n$	1					

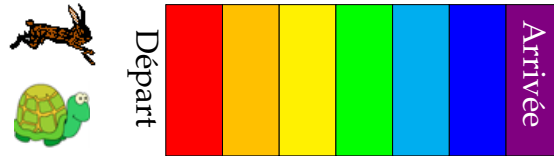
Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?

- Démontrer que : $u_n = 2^n + n$. En déduire l'expression de S_n en fonction de n .

EXERCICE 22

Le lièvre et la tortue

Il s'agit d'un jeu qui se joue avec un dé sur un plateau de sept cases :



Les règles du jeu sont données par l'algorithme en pseudo-code suivant :

t désigne la position de la tortue.

- 1) Rédiger la règle du jeu sous forme d'un texte court.
- 2) Programmer le jeu avec une fonction `partie()` en Python 🐍 renvoyant soit « lièvre » ou « tortue » pour désigner le gagnant.
- 3) Réaliser une simulation de n parties à l'aide de la fonction `simul(n)` en Python 🐍 qui donne le nombre de parties gagnées par la tortue.
Que renvoie `simul(100 000)` ?
- 4) Le jeu est-il équitable ? Si non, modifier le nombre de cases du plateau pour rendre ce jeu le plus équitable.

Entrées et initialisation

| $0 \rightarrow t$

Traitement et sorties

tant que $t < 7$ **faire**

| d prend la valeur d'un jet de dé

| **si** $d = 6$ **alors**

| | Afficher « Lièvre »

| | Stop

| **sinon**

| | $t = t + d$

| **fin**

| **si** $t \geq 7$ **alors**

| | Afficher « Tortue »

| | Stop

| **fin**

fin