

Exercices convexité – Correction

Correction exercice 1 :

1. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .

Graphiquement, ce n'est qu'au point C que la fonction s'annule et change de signe. On en déduit que le point d'abscisse 3 de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

Attention

Au point d'abscisse -1 , f'' s'annule mais ne change pas de signe. Le point d'abscisse -1 de la courbe représentative de f n'est donc pas un point d'inflexion.

2. Grâce au tableau de signes de la fonction f'' , on déduit la convexité de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	0	$+$
Convexité de f	f est concave	f est concave	f est convexe	

f est concave sur $] -\infty ; 3]$ et convexe sur $[3 ; +\infty[$.

3. Seule la courbe 2 présente une fonction concave sur $] -\infty ; 3]$ et convexe sur $[3 ; +\infty[$.

Correction exercice 2 :

Partie A : étude d'un cas particulier

1. Calcul de $C'(t)$.

On a pour tout $t \in [0 ; +\infty[: C(t) = 12 - 12e^{-\frac{7}{80}t}$.

La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions dérivables) et :

$$\begin{aligned} C'(t) &= -12 \times \left(-\frac{7}{80}\right) e^{-\frac{7}{80}t} \\ &= \frac{12 \times 7}{80} e^{-\frac{7}{80}t} \\ &= \frac{21}{20} e^{-\frac{7}{80}t} \end{aligned}$$

Autrement

Sans modifier l'écriture de $C(t)$ on a :
 $C'(t) = 12 \left(0 - \left(-\frac{7}{80}\right) e^{-\frac{7}{80}t}\right) = \frac{21}{20} e^{-\frac{7}{80}t}$.

$$\frac{21}{20} e^{-\frac{7}{80}t} > 0 \text{ sur } [0 ; +\infty[,$$

donc la fonction C est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. Le plateau est la limite de la fonction C en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{7}{80}t = -\infty \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0 \end{array} \right\} \text{ Par composition, } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{7}{80}t} = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right) = 12.$$

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 12$.

Le plateau devrait être égal à 15 ; il n'est que de 12 donc le traitement n'est pas adapté.

Partie B : étude de fonctions

1. Calcul de la dérivée de la fonction f .

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{105 \left(-\frac{1}{x^2} \right)}_{u'(x)} \times \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x} \right)}_{v(x)} + \underbrace{\frac{105}{x}}_{u(x)} \times \underbrace{\left(0 - \left(-\frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x} \right) \right)}_{v'(x)} \\ &= \frac{-105}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x} \right) + \frac{105x}{x^2} \times \frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x} \\ &= \frac{105}{x^2} \left(-1 + e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3x}{40} e^{\frac{3}{40}x} \right) \\ &= \frac{105g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1$.

2. Sens de variation de f .

$f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

D'après le tableau de variations de la fonction g , $g(x) < 0$ sur $]0 ; +\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

3. Solution de l'équation $f(x) = 5,9$.

x	0	1	α	80	$+\infty$
$f'(x)$			-		
$f(x)$		$\simeq 7,59$	$5,9$	$\simeq 1,31$	

Sur l'intervalle $[1 ; 80]$:

- f est continue ;
- f strictement décroissante sur $[1 ; 80]$;
- 5,9 est une valeur intermédiaire entre $f(1) = 105 \left(1 - e^{-\frac{3}{40}} \right) \approx 7,59$ et $f(80) = \frac{105}{80} \left(1 - e^{-6} \right) \approx 1,31$.

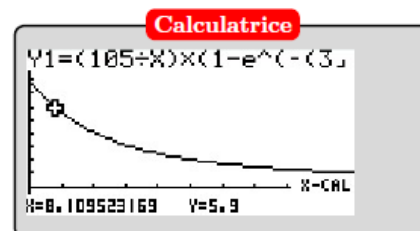
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in [1 ; 80]$, tel que $f(\alpha) = 5,9$.

La calculatrice donne $f(8) \approx 5,92 > 5,9$ et $f(9) \approx 5,73 < 5,9$,

donc $8 < \alpha < 9$;

$f(8,1) \approx 5,902 > 5,9$ et $f(8,2) \approx 5,882 < 5,9$, donc $8,1 < \alpha < 8,2$.

On a donc au dixième près $a \approx 8,1$.



Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1. a. Puisque $C(t) = \frac{105}{a} (1 - e^{-\frac{a}{80}t})$, on a :

$$C(6) = \frac{105}{a} (1 - e^{-\frac{a}{80} \times 6}) = \frac{105}{a} (1 - e^{-\frac{3}{40}a}) = f(a)$$
, d'après la question précédente.
 - b. On a vu dans la dernière question de la partie précédente que l'équation $f(a) = 5,9$ admet une solution unique et que cette solution vaut environ 8,1.
 On prendra donc 8,1 comme valeur approchée de la clairance a de ce patient.

2. On obtient pour ce patient $C(t) = \frac{d}{8,1} (1 - e^{-\frac{a}{80}t})$.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{8,1} (1 - e^{-\frac{a}{80}t}) = \frac{d}{8,1}$.

On souhaite que $\frac{d}{8,1} = 15 \iff d = 15 \times 8,1 = 121,5$.

Le débit sera donc de 121,5 micromole par heure pour avoir un plateau égal à 15 et donc un traitement efficace.

Correction exercice 3 :

Exercice 3

1. $f(10) - f(0) = 10e^{-1} - 30e^{-3} \approx 2,185$. Le dénivelé de cette nouvelle piste est donc de 2185 mètres.
2. Pour déterminer la difficulté de cette piste, il faut étudier les variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $(0 ; 10]$. Pour cela on détermine $f''(x)$ et on étudie son signe.

On obtient :

$$f'(x) = (-0,4x + 4)e^{0,2x-3} \text{ et } f''(x) = (-0,08x + 0,4)e^{0,2x-3}$$

A vous !

Vérifiez ces deux résultats..... cela ne devrait pas vous poser de problème !

En effet, le signe de $f''(x)$ donne les variations de f' .

$-0,08x + 0,4$ s'annule en $x = \frac{-0,4}{-0,08} = 5$.

Le tableau de variations de $f'(x)$ est donc :

x	0	5	20
$-0,08x + 0,4$	+	0	-
$e^{0,2x-3}$	+		+
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$4e^{-3}$	$2e^{-2}$	0

$$f'(0) = 4e^{-3} \approx 0,199$$

$$f'(5) = 2e^{-2} \approx 0,271$$

$$f'(10) = 0.$$

D'après le tableau de variation, la fonction f' admet sur l'intervalle $[0 ; 10]$ un maximum au point d'abscisse 5. Ce maximum a pour valeur approchée 0,271. La pente maximum sera donc de 27,1 %, ce qui correspond à une piste rouge.