

## Capacité 1 p 51

## Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

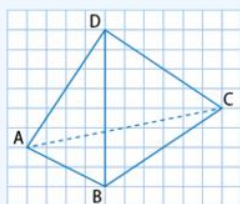
ABCD est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé.

1 Reproduire ce tétraèdre sur une feuille.

2 Placer les points R et S définis par :

a.  $\vec{DR} = \frac{1}{4}\vec{DB} + \frac{3}{2}\vec{DC}$

b.  $\vec{AS} = \frac{6}{5}\vec{AC} + \vec{BD}$

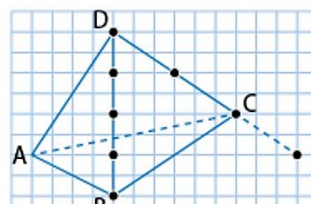
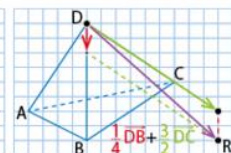
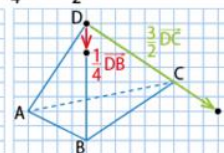
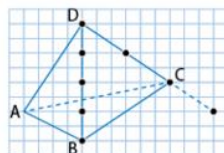


1 On souhaite placer le point R tel que  $\vec{DR} = \frac{1}{4}\vec{DB} + \frac{3}{2}\vec{DC}$  :

• On partage [DB] en 4 et [DC] en 2.

• On représente les vecteurs  $\frac{1}{4}\vec{DB}$  et  $\frac{3}{2}\vec{DC}$ .

• On place R à l'aide d'une somme de vecteurs.

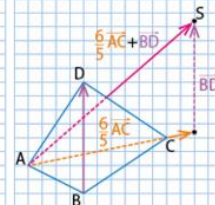
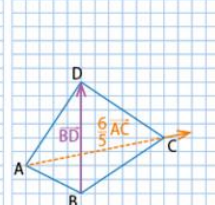
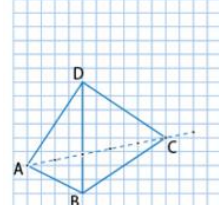


2 On souhaite placer le point S tel que  $\vec{AS} = \frac{6}{5}\vec{AC} + \vec{BD}$  :

• On partage le segment [AC] en 5.

• On représente les vecteurs  $\frac{6}{5}\vec{AC}$  et  $\vec{BD}$ .

• On place S à l'aide d'une somme de vecteurs.



## Capacité 2 p 51

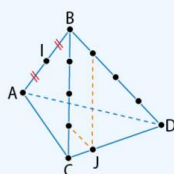
## Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs

ABCD est un tétraèdre. On appelle I le milieu de [AB] et J un point sur [CD].

1 A l'aide des graduations régulières de la figure, exprimer  $\vec{BJ}$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{BC}$  et  $\vec{BD}$ .

2 Exprimer le vecteur  $\vec{IJ}$  en fonction de  $\vec{AB}$ .

3 En déduire une expression de  $\vec{IJ}$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  et  $\vec{AD}$ .

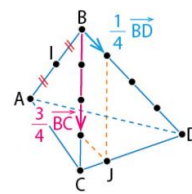


## Solution commentée

1 A l'aide des graduations, on lit  $\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BD}$ .

2 I est le milieu de [AB] donc  $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ .

3  $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BD}$   
 donc  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{1}{4}\vec{AD}$   
 $= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AD}$ .



## Capacité 3 p 53

## Démontrer un alignement avec le calcul vectoriel

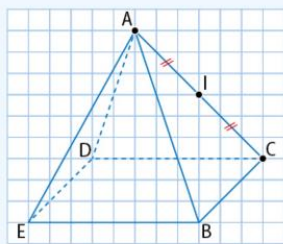
ABCDE est une pyramide de sommet A et de base le parallélogramme BCDE. On appelle I le milieu de [AC].

1 Reproduire la figure et placer le point G défini par  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$ .

2 Exprimer  $\vec{EG}$  en fonction des vecteurs  $\vec{AE}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$ .

3 Exprimer  $\vec{EI}$  en fonction des vecteurs  $\vec{AE}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$ .

4 En déduire que les points E, I et G sont alignés.



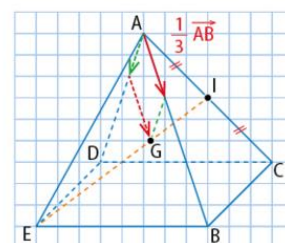
## Solution commentée

1 Voir la figure.

2  $\vec{EG} = \vec{EA} + \vec{AG} = -\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$ .

3  $\vec{EI} = \vec{EA} + \vec{AI} = -\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AC}$  car I est le milieu de [AC]. Or  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{ED}$  car BCDE est un parallélogramme.  
 Enfin  $\vec{ED} = \vec{EA} + \vec{AD} = -\vec{AE} + \vec{AD}$ .  
 Ainsi,  $\vec{EI} = -\vec{AE} + \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD})$   
 donc  $\vec{EI} = -\frac{3}{2}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$ .

4 On constate que  $\vec{EI} = \frac{3}{2}\vec{EG}$  donc les vecteurs  $\vec{EI}$  et  $\vec{EG}$  sont colinéaires. On peut en déduire que les points E, I et G sont alignés.



## N° 51 p 66

51 ABCDEFGH est un cube.

Les points K et L sont tels que :

$$\vec{AK} = \frac{3}{2}\vec{AC} \text{ et } \vec{AL} = 3\vec{AE}.$$

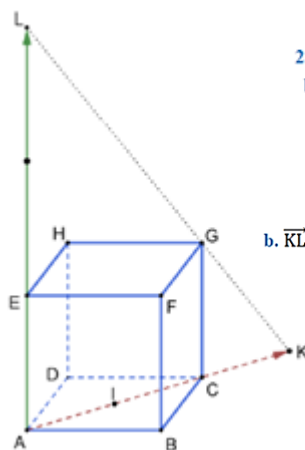
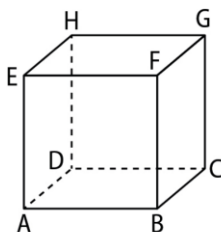
1. Réaliser une figure.

2. a. Exprimer  $\vec{AG}$  en fonction de  $\vec{AC}$  et  $\vec{AE}$ .

b. En déduire que  $\vec{KG} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AE}$ .

3. a. Exprimer  $\vec{KL}$  en fonction de  $\vec{AC}$  et  $\vec{AE}$ .

b. En déduire que K, G et L sont alignés.



2. a.  $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{AE}$ .

b.  $\vec{KG} = \vec{KA} + \vec{AG}$   
 $= -\frac{3}{2}\vec{AC} + \vec{AC} + \vec{AE}$   
 $= -\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AE}$ .

3. a.  $\vec{KL} = -\frac{3}{2}\vec{AC} + 3\vec{AE}$ .

b.  $\vec{KL} = 3\vec{KG}$ , donc les vecteurs  $\vec{KL}$  et  $\vec{KG}$  sont colinéaires.

Les points K, G et L sont alignés

## Capacité 4 p 53

### Montrer que des vecteurs sont coplanaires

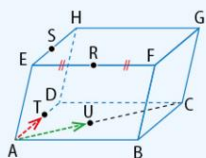
ABCDEFGH est un parallélépipède. R est le milieu de [EF] et S est le milieu de [EH].

Les points T et U sont définis par les égalités vectorielles  $\vec{AT} = \frac{2}{3}\vec{AD}$  et  $\vec{AU} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ .

1. Exprimer les vecteurs  $\vec{TU}$ ,  $\vec{TR}$  et  $\vec{TS}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .

2. Calculer  $9\vec{TU} + 6\vec{TS}$ .

3. En déduire que les vecteurs  $\vec{TU}$ ,  $\vec{TR}$  et  $\vec{TS}$  sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points T, U, R et S ?



### Solution commentée

1.  $\vec{TU} = \vec{TA} + \vec{AU} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ . Or  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$  car ABCD est un parallélogramme.

D'où  $\vec{TU} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$  soit  $\vec{TU} = -\frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB}$ .

•  $\vec{TR} = \vec{TA} + \vec{AE} + \vec{ER} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EF}$ . Puisque ABFE est un parallélogramme, on a  $\vec{EF} = \vec{AB}$  donc  $\vec{TR} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ .

•  $\vec{TS} = \vec{TA} + \vec{AE} + \vec{ES} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EH}$ . Puisque ADHE est un parallélogramme, on a  $\vec{EH} = \vec{AD}$  donc  $\vec{TS} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AD}$  soit  $\vec{TS} = -\frac{1}{6}\vec{AD} + \vec{AE}$ .

2. On a  $9\vec{TU} = -3\vec{AD} + 3\vec{AB}$  et  $6\vec{TS} = -\vec{AD} + 6\vec{AE}$  donc  $9\vec{TU} + 6\vec{TS} = -4\vec{AD} + 3\vec{AB} + 6\vec{AE}$ .

3. On peut remarquer que  $6\vec{TR} = -4\vec{AD} + 3\vec{AB} + 6\vec{AE} = 9\vec{TU} + 6\vec{TS}$ . Ainsi  $6\vec{TR} - 9\vec{TU} - 6\vec{TS} = \vec{0}$ . On en déduit que les vecteurs  $\vec{TR}$ ,  $\vec{TU}$  et  $\vec{TS}$  sont coplanaires.

4. Les vecteurs  $\vec{TR}$ ,  $\vec{TU}$  et  $\vec{TS}$  de même origine T sont coplanaires, donc les points R, U et S appartiennent à un même plan passant par T : ils sont coplanaires.

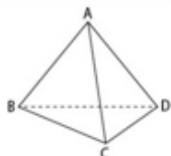
## N°57 p 67

I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD] et [CD].

1. Justifier que  $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

2. Justifier que  $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

3. En déduire que  $\vec{IJ}$ ,  $\vec{KL}$  et  $\vec{AB}$  sont coplanaires.



57 1.  $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$  car I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]

2.  $\vec{KL} = \vec{KD} + \vec{DL} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AC}$  car K et L sont les milieux respectifs de [AD] et [DC]

3.  $\vec{IJ} - \vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ , donc les vecteurs  $\vec{IJ}$ ,  $\vec{KL}$  et  $\vec{AB}$  sont coplanaires.

## N°58 p 67

58 I est le milieu de [BC], J est le milieu de [BD], E et F sont définis par les égalités vectorielles  $\vec{CE} = 2\vec{CD}$  et  $\vec{BF} = \vec{AE}$ .

1. Exprimer  $\vec{AB} + \vec{AC}$  en fonction de  $\vec{AI}$ .

2. a. Démontrer que  $\vec{AF} - 2\vec{AI} = 2\vec{CD}$ .

b. En déduire que  $\vec{AF} - 2\vec{AI} = 4\vec{IJ}$ .

c. Que peut-on dire des vecteurs  $\vec{AI}$ ,  $\vec{AJ}$  et  $\vec{AF}$  ?

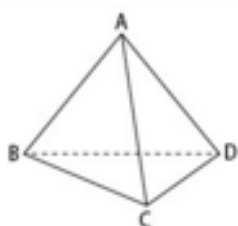
58 1.  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$ .

2. a.  $\vec{AF} - 2\vec{AI} = \vec{AF} - \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BF} + \vec{BA} + \vec{CA} = \vec{BF} + \vec{CA} = \vec{AE} + \vec{CA} = \vec{CE} = 2\vec{CD}$ .

b. I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [BD], donc  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{CD}$ .

On en déduit que  $2\vec{CD} = 4\vec{IJ}$  et  $\vec{AF} - 2\vec{AI} = 4\vec{IJ}$ .

c. L'égalité précédente équivaut à  $\vec{AF} = -2\vec{AI} + 4\vec{AJ}$ , donc les vecteurs  $\vec{AF}$ ,  $\vec{AI}$  et  $\vec{AJ}$  sont coplanaires.



## N°63 p 67

ABCDEFGH est un cube

Le point K est tel que :

$$\vec{AK} = 6\vec{AB} + 2\vec{AD} - 3\vec{AE}$$

1. Exprimer  $\vec{EG}$ ,  $\vec{EB}$  et  $\vec{EK}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$

2. Déterminer deux réels x et y tels que

$$\vec{EK} = x\vec{EG} + y\vec{EB}$$

3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs  $\vec{EG}$ ,  $\vec{EB}$  et  $\vec{EK}$  ?

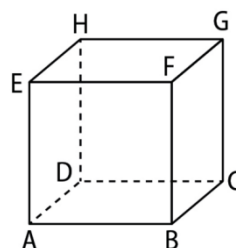
4. Que peut-on alors dire des points B, E, G et K ?

63 1. On a  $\vec{EG} = \vec{AB} + \vec{AD}$  ;  $\vec{EB} = \vec{AB} - \vec{AE}$  et  $\vec{EK} = 6\vec{AB} + 2\vec{AD} - 4\vec{AE}$ .

2.  $\vec{EK} = 2\vec{EG} + 4\vec{EB}$ .

3. Les vecteurs  $\vec{EK}$ ,  $\vec{EG}$  et  $\vec{EB}$  sont coplanaires.

4. Les points B, E, G et K sont donc coplanaires.



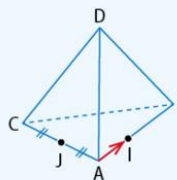


## Capacité 5 p 55

### Décrire la position relative de deux droites

ABCD est un tétraèdre. Le point I est défini par  $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$  et le point J est le milieu du segment [AC].

- 1 Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes.
- 2 En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.



### Solution commentée

- 1 I et J appartiennent respectivement aux droites (AB) et (AC) qui sont incluses dans le plan (ABC) donc I et J appartiennent à (ABC). On en déduit que les droites (IJ) et (BC) sont coplanaires : elles sont soit sécantes, soit parallèles.  
Or  $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$  car J est le milieu de [AC] et  $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$ . Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{IJ}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{IJ} = k\vec{BC} = -k\vec{AB} + k\vec{AC}$ . Le couple  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  est une base du plan (ABC). La décomposition du vecteur  $\vec{IJ}$  dans cette base est unique donc l'égalité  $\vec{IJ} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -k\vec{AB} + k\vec{AC}$  conduit à  $k = \frac{1}{3}$  et  $k = \frac{1}{2}$  ce qui n'est pas possible. (IJ) et (BC) ne peuvent pas être parallèles : elles sont donc sécantes.
- 2 Supposons que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles. Cela permet d'affirmer que les droites (IJ) et (AD) sont coplanaires. Or A, I et J appartiennent tous trois au plan (ABC) d'après la question 1. Cela signifie que D est un point du plan (ABC), c'est-à-dire que A, B, C et D sont coplanaires. C'est absurde car ABCD est un tétraèdre. La supposition initiale est donc fautive : (AD) et (IJ) ne sont pas parallèles.

## Capacité 6 p 55

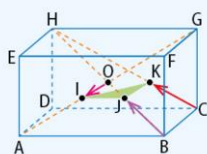
### Décrire la position relative de deux plans

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre O.

On définit les points I, J et K par les égalités vectorielles :

$$\vec{OI} = \frac{1}{3}\vec{OA}; \vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BO} \text{ et } \vec{CK} = \frac{1}{3}\vec{CH}.$$

- 1 Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
- 2 a. Exprimer  $\vec{BJ}$  en fonction de  $\vec{BH}$ .  
b. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



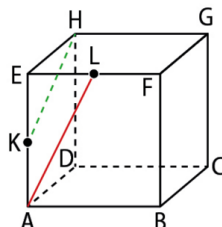
### Solution commentée

- 1 On décompose le vecteur  $\vec{IJ}$  à l'aide de la relation de Chasles :  
 $\vec{IJ} = \vec{IO} + \vec{OB} + \vec{BJ} = -\frac{1}{3}\vec{OA} + \vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{BO} = \frac{1}{3}\vec{AO} + \frac{1}{3}\vec{OB}$ .  
On en déduit :  $\vec{IJ} = \frac{1}{3}(\vec{AO} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}\vec{AB}$ .  
 $\vec{IJ}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires donc les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
- 2 a. O est le centre du parallélépipède rectangle donc O est le milieu de [BH].  
 $\vec{BO} = \frac{1}{2}\vec{BH}$ . Ainsi  $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\vec{BH} = \frac{1}{3}\vec{BH}$ .  
b. On décompose le vecteur  $\vec{JK}$  à l'aide de la relation de Chasles :  
 $\vec{JK} = \vec{JB} + \vec{BC} + \vec{CK} = -\frac{1}{3}\vec{BH} + \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CH} = \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CH} + \frac{1}{3}\vec{HB}$ .  
Cela conduit à  $\vec{JK} = \vec{BC} + \frac{1}{3}(\vec{CH} + \vec{HB}) = \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \frac{2}{3}\vec{BC}$ .  
 $\vec{IJ}$  et  $\vec{JK}$  sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) qui sont respectivement égaux à  $\frac{1}{3}\vec{AB}$  et  $\frac{2}{3}\vec{BC}$ , deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).  
On en déduit que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

## N°64 p 67

### 64 Capacité 5, p. 55

ABCDEFGH est un cube, K est le milieu de [AE] et L est le milieu de [EF].



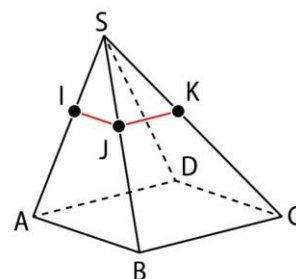
- 1 a. Justifier que K appartient au plan (ADH).  
b. Justifier que les vecteurs  $\vec{AD}$  et  $\vec{KH}$  ne sont pas colinéaires.  
c. Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (KH) ?
2. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (AL) et (KH) ne sont pas parallèles.

## N°69 p 68

### 69 Capacité 6, p. 55

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme. Les points I, J et K sont tels que :

$$\vec{SI} = \frac{1}{3}\vec{SA}, \vec{SJ} = \frac{1}{3}\vec{SB} \text{ et } \vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SC}.$$



1. Justifier que  $\vec{IJ}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires puis que  $\vec{JK}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires.
2. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

**64 1. a.** K est le milieu de [AE] et [AE] est un segment du plan (ADH), donc K appartient à (ADH).

**b.**  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  est une base de (ADH) et  $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$ , donc  $\overrightarrow{KH}$  et  $\overrightarrow{AD}$  ne sont pas colinéaires.

**c.** (AD) et (KH) sont sécantes.

**2.** On suppose que (AL) et (KH) sont parallèles.

Dès lors (AL) et (KH) sont coplanaires, ce qui signifie que L est un point du plan (ADH).

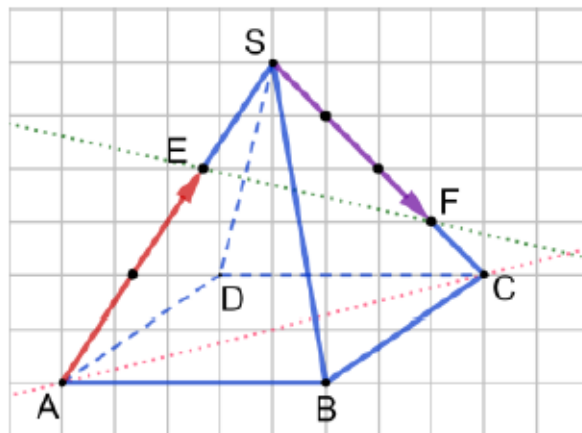
Ceci est absurde car ABCDEFGH est un cube et L est un point de (ABE) qui n'appartient pas à la droite (AE). Par conséquent, (AL) et (KH) ne peuvent pas être parallèles.

**69 1.**  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AS} + \frac{1}{3} \overrightarrow{SB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires.

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JS} + \overrightarrow{SK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BS} + \frac{1}{3} \overrightarrow{SC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{JK}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires.

**2.**  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{JK}$  sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) qui sont respectivement égaux à  $\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$  et  $\frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ , deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

**68 1. et 2.**



**3.** E et F sont deux points dans le plan (SAC), donc les droites (EF) et (AC) sont soit sécantes, soit parallèles. Or  $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{SA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{SC}$  et  $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ .

Il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{EF} = k \overrightarrow{AC}$ , donc les droites (EF) et (AC) sont sécantes.