

Affixes

40 On considère le nombre complexe $z = 2 + i$.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, placer :

- a) le point A d'affixe z .
- b) le point B d'affixe $-z$.
- c) le point C d'affixe $\bar{z}$.
- d) le point D d'affixe $z - 3$.
- e) le point E d'affixe $z - 3i$.

42 On considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 3 - i\sqrt{2}, z_B = 1 + i \text{ et } z_C = \frac{i}{2}.$$

Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

43 Pour chaque question, représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition demandée :

- a) $\operatorname{Re}(z) = -1$.
- b) $\operatorname{Im}(z) = 0$.
- c) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) + 1$.

46 Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 6 - 2i$ et $z_C = -3 - i$.

1. Déterminer l'affixe du milieu de segment [AB].
2. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

47 On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a , b et c .

1. Soit G le point d'affixe g tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Montrer que $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$.

2. On suppose que $a = 2 + 3i$, $b = 5 + 4i$ et $c = 3 + 5i$. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ placer les points A, B, C et G.

Modules

50 Déterminer le module des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = 3 - 2i$
- b) $z_2 = \sqrt{2} + i$
- c) $z_3 = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$
- d) $z_4 = \frac{5}{7}i$.

52 On considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 5 + 4i \text{ et } z_B = 2 + 3i.$$

Calculer la distance AB.

55 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

- a) $|z - 2 + i| = 3$
- b) $|z + 1 - i| = -2$
- c) $|z - 2| = |z - 8|$
- d) $|z - 2 + 3i| = |z + 4 - 2i|$

Arguments et forme trigonométrique

56 Déterminer un argument des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = 19$
- b) $z_2 = \frac{7}{3}i$
- c) $z_3 = -1 + i$
- d) $z_4 = \sqrt{3} + i$

57 Déterminer un argument des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$
- b) $z_2 = i\sqrt{3} + 1$

58 On considère le nombre complexe $z = -1 + i$.

1. Déterminer un argument de z .
2. En déduire un argument de $-z$ et de $\bar{z}$.

59 Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = 7$
- b) $z_2 = 4i$
- c) $z_3 = \sqrt{3} + i$
- d) $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

60 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$
- b) $z_2 = 3 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$
- c) $z_3 = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$
- d) $z_4 = \frac{1}{2} \times \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right)$

64 Dans le plan complexe, représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

- a) $\arg(z) = \pi[2\pi]$ ou $\arg(z) = -\pi[2\pi]$
- b) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Formules d'addition et de duplication

65 1. Déterminer la valeur de $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

66 Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

- a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

67 Soit x un réel tel que $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(x) = \frac{1}{3}$.

1. Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.
2. En utilisant les formules de duplication, déterminer la valeur exacte de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

Propriétés des arguments

- 68** 1. Déterminer un argument des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = -1 - i$.
2. En déduire un argument de $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ et z_1^5 .

- 69** 1. Déterminer un argument de $z = 4 - i \times 4\sqrt{3}$.
2. En déduire un argument de $\frac{1}{z}$ et de z^{1000} .

Forme exponentielle

- 71** Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) z_1 de module $\sqrt{3}$ et d'argument $\frac{2\pi}{3}$

b) $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{6}} \times 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ c) $z_3 = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}}$

- 72** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ c) $z_3 = 2e^{2i\pi}$ d) $z_4 = \sqrt{2}e^{i\pi}$

- 75** On considère le nombre complexe $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer la forme algébrique de z^6 .

- 77** En utilisant les formules d'Euler, montrer que $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}$.

- 96** En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

122 Trigonométrie

1. Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. En utilisant les formules d'Euler, exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\sin(3x)$.
3. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Racines n-ième de l'unité

- 22** On veut étudier le pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. Déterminer une valeur approchée de la longueur de ses côtés.

Applications géométriques

- 81** Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 0$ et $z_C = -5 - i$.
1. Déterminer la forme algébrique de $k = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
2. En déduire un argument de k .
3. Que peut-on en déduire ?

- 103** On considère l'équation

$$(E) : z^2 - 6z + c = 0,$$

avec c un réel strictement supérieur 9.

1. Déterminer les deux solutions complexes de l'équation (E), que l'on notera z_A et z_B .
2. Soit A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B .
- a) Justifier que OAB est isocèle en O.
- b) Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle OAB est rectangle. Déterminer cette valeur.

Approfondissements

- 99** On veut déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. a) Calculer ω^5 .
- b) Factoriser $\omega^5 - 1$ par $\omega - 1$.
- c) En déduire que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Exprimer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
3. En utilisant les formules de duplication, exprimer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
4. a) En utilisant les questions précédentes, en déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
- b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

121 Ensemble de points

1. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $|z - 4| = 3$ b) $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - 7i|$

c) $\arg(z) = \pi[2\pi]$ d) $\arg\left(\frac{z - 2 + i}{z - 5i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

2. Déterminer les affixes des sommets d'un polygone régulier à 12 côtés inscrit dans le cercle trigonométrique dont un sommet est le point A d'affixe 1. Puis déterminer son périmètre.

120 Nombres complexes et géométrie

On considère les points A, B, C et M d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i$$

$$z_B = 2 + i(1 + \sqrt{3})$$

$$z_C = 2 + i(1 - \sqrt{3})$$

$$z_M = 1 + i.$$

1. a) Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre M et de rayon 2.
- b) Dans un repère orthonormé, tracer le cercle de centre M et de rayon 2, et placer les points A, B et C.
2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'affixe de I, milieu de [AM].
4. a) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
- b) Quelle est la nature de ABCD ?
5. Les points B, D et M sont-ils alignés ?

98 1. Déterminer les formes exponentielles des nombres complexes $1 + i$ et $1 - i$.

2. Déterminer la forme trigonométrique de

$$S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n.$$

3. Pour chaque proposition suivante, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier.

Proposition 1 Pour tout entier naturel n , S_n est un nombre réel.

Proposition 2 Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

D'après Bac S 2018

108 Soit f la fonction qui à tout point M , distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\frac{1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i \text{ et } z_B = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A' , image du point A par la fonction f .

b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B' , image du point B par la fonction f .

c) Placer les points A , B , A' et B' dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel.

On considère le nombre complexe $z = re^{i\theta}$.

a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}e^{i(\pi - \theta)}$.

b) Est-il vrai que si un point M , distinct de O , appartient au disque de centre O et de rayon 1, sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit Γ le cercle de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

b) On pose $z = x + iy$ avec x et y deux réels non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y .

c) Soit M un point, distinct de O , du cercle Γ . Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

D'après Bac S 2019

109 Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = z_n - i$.

On note A_n le point d'affixe z_n , B_n le point d'affixe u_n et C le point d'affixe i .

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

2. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - i)$.

3. a) Pour tout entier naturel n , calculer le module de u_n en fonction de n .

b) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - i| = 0$.

c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. a) Soit n un entier naturel, déterminer un argument de u_n .

b) Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n , le point A_n appartient à la droite d'équation $y = -x + 1$.

D'après Bac S 2018

116 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

Déterminer l'expression de $f(z)$ en fonction de x et y .

2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplit la condition demandée :

a) $f(z) = 2$

b) $f(z) = 2i$

c) $f(z) \in \mathbb{R}$

d) $f(z)$ imaginaire pur