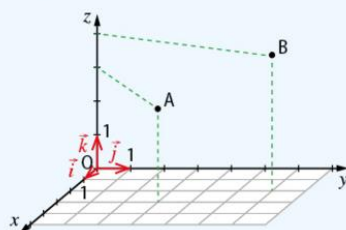


Capacité 9 p 59

Déterminer une représentation paramétrique de droite

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B.

- 1 Lire graphiquement les coordonnées de ces points dans le repère.
- 2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 3 Déterminer deux représentations paramétriques différentes de la droite (AB) dans ce repère.



Solution commentée

- 1 Les coordonnées de A sont $(3; 3; 3)$ et celles de B sont $(2; 6; 4)$.
- 2 Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$, c'est-à-dire $(2 - 3; 6 - 3; 4 - 3)$ soit $(-1; 3; 1)$.
- 3 La droite (AB) passe par le point A $(3; 3; 3)$ et elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-1; 3; 1)$.

Une représentation paramétrique de (AB) est donc

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Puisque B est un point de (AB), une autre représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = x_B + k x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_B + k y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_B + k z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 6 + 3k \\ z = 4 + k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Capacité 10 p 59

Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique

On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- 1 Le point A $(3; 5; -2)$ appartient-il à la droite d ?
- 2 Donner les coordonnées d'un point de d , ainsi que celles d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d .
- 3 d est-elle parallèle à la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = 1 - 6k \\ z = -5 - 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$?

Solution commentée

- 1 A appartient à d si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_A = 5 - t \\ y_A = -1 + 3t \\ z_A = 1 + t \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 3 = 5 - t \\ 5 = -1 + 3t \\ -2 = 1 + t \end{cases}$ soit à $\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$.

Ceci implique qu'il n'existe pas de réel t vérifiant les trois équations : on en déduit que le point A n'appartient pas à la droite d .

- 2 Un point de d a pour coordonnées $(5; -1; 1)$ que l'on obtient en remplaçant t par 0 dans les équations. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de d a pour coordonnées $(-1; 3; 1)$.
- 3 $\vec{u}(-1; 3; 1)$ est un vecteur directeur de la droite d et $\vec{v}(2; -6; -2)$ est un vecteur directeur de la droite d' . On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$. Puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on en déduit que les droites d et d' sont parallèles.

Déterminer l'intersection de deux droites de l'espace

Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 5k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Solution commentée

Les droites d et d' ont un point d'intersection si, et seulement si, il existe un couple

$$(t; k) \text{ de réels solution du système } \begin{cases} 3 + 2t = 1 - 3k \\ -1 - t = 1 + k \\ 4 + 3t = 2 - 5k \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \\ 3t + 5k = -2 \end{cases}.$$

On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :

$$\begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -2t - 2k = 4 \end{cases}.$$

On remplace la deuxième équation par la somme des deux équations, le système

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ k = 2 \end{cases}. \text{ On obtient alors } t = -4 \text{ et } k = 2.$$

Il faut à présent s'assurer que la troisième égalité est vérifiée par ces valeurs :

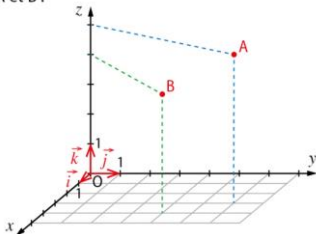
$3t + 5k = 3 \times (-4) + 5 \times 2 = -2$, ce qui convient.

Par conséquent, A est le point de d de paramètre -4 et A est aussi le point de d' de paramètre 2. On remplace, par exemple, dans la représentation paramétrique de d' :

$$\begin{cases} x_A = 1 - 3 \times 2 \\ y_A = 1 + 2 \\ z_A = 2 - 5 \times 2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_A = -5 \\ y_A = 3 \\ z_A = -8 \end{cases}.$$

N°112 p 70

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B :



1. Lire graphiquement les coordonnées de ces points.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Déterminer deux représentations paramétriques différentes de la droite (AB).

112 1. A(3 ; 6 ; 5) et B(4 ; 4 ; 4).

2. $\overrightarrow{AB}(1 ; -2 ; -1)$.

3. La droite (AB) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6 - 2t \\ z = 5 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 4 - 2k \\ z = 4 - k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

N°116 p 70

Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 8 - 7t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. Le point $A(-4; 1; 3)$ appartient-il à la droite d ?

116 1. Le système $\begin{cases} -4 = -5 + t \\ 1 = 8 - 7t \\ 3 = 1 + 2t \end{cases}$ donne $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$, donc A appartient à la droite d et il a pour paramètre $t = 1$.

2. $B(-5; 8; 1)$ est un autre point de d et $\vec{u}(1; -7; 2)$ est un vecteur directeur de d .

3. $\vec{v}(-2; -14; 4)$ est un vecteur directeur de d' .

Puisque $y_{\vec{v}} = 2 y_{\vec{u}}$ mais $x_{\vec{v}} \neq 2 x_{\vec{u}}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites d et d' ne sont pas parallèles.

2. Donner les coordonnées d'un autre point de d , ainsi que celles d'un vecteur directeur de d .

3. d est-elle parallèle à d' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 - 14k \\ z = 5 + 4k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} ?$$

N°123 p 71

Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 8 - t \\ y = -6 + 2t \\ z = 15 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 6 - 6k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

123 $\vec{u}(-1; 2; 1)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(4; -6; 2)$ est un vecteur directeur de d' .

Puisque $x_{\vec{v}} = -4 x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{v}} \neq -4 y_{\vec{u}}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites d et d' sont soit sécantes, soit non coplanaires.

On résout le système $\begin{cases} 8 - t = -2 + 4k \\ -6 + 2t = 6 - 6k \\ 15 + t = 1 + 2k \end{cases}$.

La première et la troisième équations donnent $\begin{cases} 4k + t = 10 \\ 2k - t = 14 \end{cases}$, soit $\begin{cases} k = 4 \\ t = -6 \end{cases}$.

Vérifions avec la deuxième égalité : $-6 + 2 \times t = -18$ et $6 - 6 \times k = -18$, ce qui convient.

Par conséquent, les droites d et d' sont sécantes en $A(14; -18; 9)$.

N°125 p 71

125 Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

125 $\vec{u}(1; 3; 2)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(1; -1; 4)$ est un vecteur directeur de d' .

Puisque $x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}}$ mais $y_{\vec{u}} \neq y_{\vec{v}}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites d et d' sont soit sécantes, soit non coplanaires.

On résout le système $\begin{cases} 3 + k = -2 + t \\ -2 + 3k = 2 - t \\ 2k = 1 + 4t \end{cases}$.

Les deux premières équations donnent $\begin{cases} k - t = -5 \\ 3k + t = 4 \end{cases}$, soit $\begin{cases} k = \frac{-1}{4} \\ t = \frac{19}{4} \end{cases}$.

Vérifions avec la troisième égalité : $2k = \frac{-1}{2}$ et $1 + 4t = 20$, ce qui ne convient pas.

Par conséquent, les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

126 La droite d passe par le point $A(1; 1; 0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 1; -1)$. La droite d' passe par le point $B(0; 1; -1)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{v}(1; 2; 1)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
2. Justifier qu'alors d et d' sont sécantes.
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

126 1. On a $\overrightarrow{AB}(-1; 0; -1)$, $\vec{u}(-1; 1; -1)$ et $\vec{v}(1; 2; 1)$.

Puisque $\vec{v} = 2\vec{u} - 3\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

2. On en déduit que les droites d et d' sont coplanaires : elles sont soit sécantes, soit parallèles.

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites d et d' sont sécantes.

3. On résout le système
$$\begin{cases} 1 - t = k \\ 1 + t = 1 + 2k \\ -t = -1 + k \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $\begin{cases} k + t = 1 \\ 2k - t = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$.

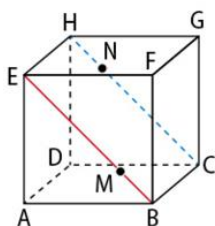
Vérifions avec la troisième égalité : $-t = \frac{-2}{3}$ et $-1 + k = \frac{-2}{3}$, ce qui convient.

Par conséquent, les droites d et d' sont sécantes en $C(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{-2}{3})$.

128 = CALCULER  RAISONNER

ABCDEFGH est un cube.

On définit les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CH}$.



1. Donner les coordonnées de chacun des sommets du cube dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

128 1. $A(0; 0; 0)$ $E(0; 0; 1)$
 $B(1; 0; 0)$ $F(1; 0; 1)$
 $C(1; 1; 0)$ $G(1; 1; 1)$
 $D(0; 1; 0)$ $H(0; 1; 1)$

2. a. On a $M(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{4})$ et $N(\frac{1}{4}; 1; \frac{3}{4})$.

b. Une représentation paramétrique de la droite (MN) est
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

c. Puisque P appartient au plan (ABD), on a $z_P = 0$.

Le système
$$\begin{cases} x_P = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t \\ y_P = t \\ 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} x_P = 1 \\ y_P = \frac{-1}{2} \\ t = \frac{-1}{2} \end{cases}.$$

Les coordonnées de P sont donc $(1; \frac{-1}{2}; 0)$.

3. a. P et B ont une cote nulle, donc ils appartiennent tous les deux au plan (ABC). Or, la cote de G est 1, donc G n'appartient pas à ce plan. Les points P, B et G ne peuvent pas être alignés.

b. P, B et C ont la même abscisse et la même cote : ils sont donc alignés sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

4. a. Une représentation paramétrique de la droite (BC) est
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

2. a. Calculer les coordonnées des points M et N dans ce repère.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN) dans ce repère.

c. En déduire les coordonnées de P, point d'intersection entre (MN) et le plan (ABD).

3. a. Sans effectuer de calcul, justifier que P, B et G ne sont pas alignés.

b. Sans effectuer de calcul, justifier que P, B et C sont alignés.

4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

b. En déduire le paramètre correspondant pour le point P.