

Préparation au DS-2 : Suites numériques-Corrigé

EXERCICE 1 : 4 points

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = -n + (-1)^n$.

Par comparaison : On sait que $u_n \leq -n + 1$, car $(-1)^n \leq 1$, et $\lim_n (-n + 1) = -\infty$, par le théorème de comparaison on obtient $\lim_n u_n = -\infty$. (La plus grande des deux suites diverge vers $-\infty$, donc la plus petite suivra).

2. $u_n = 3 \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$.

Commençons par simplifier l'écriture tout d'abord, $u_n = 3 \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{\frac{3}{4}}$, soit

$$u_n = 3 \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}. \text{ Or } \lim_n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \text{ (suite géométrique de raison } 0 < \frac{1}{4} < 1\text{), donc par somme } \lim_n u_n = \lim_n \left[4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = 4.$$

3. $u_n = \frac{-2n+10}{n^2+5n-5}$.

On a une F.I., car $\lim_n (-2n + 10) = -\infty$ et $\lim_n (n^2 + 5n - 5) = +\infty$. On factorise pour lever cette

indétermination, soit $u_n = \frac{n(-2 + \frac{10}{n})}{n(n + 5 - \frac{5}{n})} = \frac{-2 + \frac{10}{n}}{n + 5 - \frac{5}{n}}$. Or $\begin{cases} \lim_n (-2 + \frac{10}{n}) = -2 \\ \lim_n (n + 5 - \frac{5}{n}) = +\infty \end{cases}$ et par quotient $\lim_n u_n = 0$.

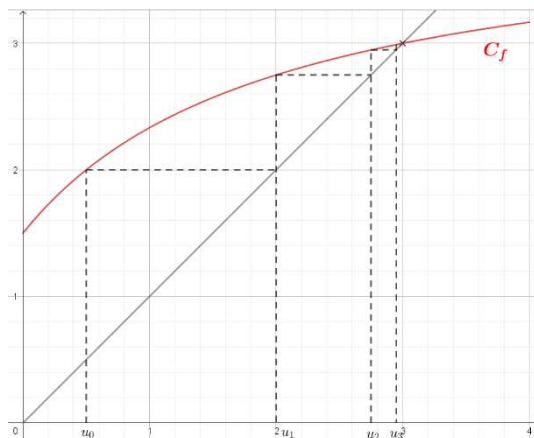
4. $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

$\sin n$ n'a pas de limite donc on encadre la suite pour pouvoir utiliser les théorème du cours, soit $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ (car $n^2 > 0$), mais $\lim_n -\frac{1}{n^2} = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0$, et par le théorème d'encadrement (ou les gendarmes), $\lim_n u_n = 0$.

Exercice 2 (1,5 + 2 + 1 + 0,75 + 0,75 + (1 + 0,5 + 1,5)) = 9 points

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_0 = 0,5$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, avec f la fonction définie sur $[0 ; 4]$, par $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$.

1) La suite (U_n) semble croître $U_0 < U_1 < U_2 < U_3$ et converge vers la valeur 3.



2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 < U_n < 3$.

Etudions les variations de f sur $[0 ; 3]$. En effet, f est dérivable sur $[0 ; 3]$ comme fonction homographique et, $f'(x) = \frac{4(x+2) - (4x+3) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{4x+8-4x-3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$ pour tout x de $[0 ; 3]$. D'où la croissance de f sur cet intervalle.

Pour tout entier naturel, $P(n)$ désigne la propriété « $0 < U_n < 3$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $U_0 = 0,5$, donc $0 < U_0 < 3$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons, pour un certain entier naturel n que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire $0 < U_n < 3$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, $0 < U_{n+1} < 3$???

Alors, $0 < U_n < 3$, par hypothèse de récurrence donc $f(0) < f(U_n) < f(3)$, soit $\frac{3}{2} < U_{n+1} < 3$, d'où

$0 < U_{n+1} < 3$, car $0 < f(0) = \frac{3}{2}$ et $f(3) = 3$.

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie. La propriété $P(n)$ est donc héréditaire.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée et est héréditaire, donc par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , soit $0 < U_n < 3$.

3) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(3-U_n)}{U_n+2}$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n+3}{U_n+2} - U_n = \frac{4U_n+3}{U_n+2} - \frac{U_n(U_n+2)}{U_n+2} = \frac{4U_n+3-U_n^2-2U_n}{U_n+2} = \frac{-U_n^2+2U_n+3}{U_n+2}$. IL suffit de factoriser le numérateur (un polynôme du second degré où $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$ et $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16$). Ses racine sont $\frac{-2-4}{-2} = 3$ et $\frac{-2+4}{-2} = -1$, sa forme factorisée est : $-1 \times (U_n + 1)(U_n - 3) = (U_n + 1)(3 - U_n)$, d'où le résultat.

4) En déduire que la suite (U_n) est croissante.

IL suffit de montrer que la différence $U_{n+1} - U_n$ est positive. En effet, on a $0 < U_n < 3$ (Q2), donc $U_n + 2 > 0$; $U_n + 1 > 0$, ainsi que $3 - U_n > 0$, d'où $U_{n+1} - U_n > 0$. D'où la croissance de la suite (U_n) .

5) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ . Enoncez la propriété mobilisée !

La suite (U_n) est croissante (Q4) et majorée par 3 (Q2), ainsi par le théorème de la convergence monotone, la suite (U_n) est bien convergente vers une limite réelle ℓ .

6) On admet que cette limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

a. Déterminer la valeur de ℓ .

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{4\ell+3}{\ell+2} = \ell \Leftrightarrow 4\ell+3 = \ell^2+2\ell$ (par le produit en croix) $\Leftrightarrow \ell^2-2\ell-3=0$. Le même second degré qu'en (Q3) à un signe près, d'où $\ell = -1$ ou $\ell = 3$, or $0 < U_n < 3$, donc $\ell \leq 3$, un seul choix s'impose, soit $\ell = 3$. Et $\lim_n U_n = 3$.

b. Que fait cet algorithme ci-dessous ?

Cet algorithme calcule les termes de la suite (U_n) sous la condition que la distance entre le terme U_n et 3 soit supérieur à $p = 0,01$. Dès que cette distance devient inférieur à p , la boucle s'arrête et la fonction renvoie donc le 1^{er} entier naturel n_0 tel que $3 - U_{n_0} \leq 0,01$.

c. Le tester à la calculatrice avec $p = 0,01$. Indiquer à chaque étape le contenu des variables U et n en complétant le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
U	0,5	2	2,75	2,9474	2,9894	2,9979
$3 - U$	2,5	1	0,25	0,0526	0,0106	0,0021

```

1 def seuil(p):
2     n=0
3     U=0.5
4     while 3-U>p:
5         n=n+1
6         U=(4*U+3)/(U+2)
7     return(n)

```

On constate que $0,0021 < 0,01$, donc pour la première fois : $3 - U_5 \leq 0,01$; la fonction renvoie donc $n = 5$.

Exercice 3 $(1 + (0,5 + 1,5) + (1,5 + 1) + 1,5) = 7$ points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

Attention aux calculs :

Pour $n = 0$, on a $u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 2 \times 0 - 1$, soit $u_1 = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = -\frac{1}{2}$.

Pour $n = 1$, on a $u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 2 \times 1 - 1$, soit $u_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$.

2.

(a) Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n . (Pensez à simplifier vos calculs).

Attention : On remplace $n + 1$ par n et donc n par $n - 1$, soit $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2(n - 1) - 1$, donc

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2n - 3.$$

(b) Compléter les lignes 2, 3, 4 et 5 de la fonction Python ci-dessous pour qu'elle calcule et renvoie la valeur de u_n , où n est un entier naturel saisi par l'utilisateur.

(2) $u=1$; (3) $\text{range}(n)$; (4) $u=(1/2)*u+2*i-1$ et (5) $\text{return}(n)$.

```
1 def u(n) :
2     u=1
3     for i in range(n) :
4         u=(1/2)*u+2*i-1
5     return(n)
```

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 4n + 10$.

(a) Montrer que (v_n) est géométrique, en préciser la raison.

On exprime v_{n+1} en fonction de v_n . Soit n un entier naturel, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4(n + 1) + 10$, puis on remplace u_{n+1} par son expression, soit $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4(n + 1) + 10 = \frac{1}{2}u_n - 2n + 5$, et en forçant la factorisation par $\frac{1}{2}$, nous obtenons, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10)$, d'où $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ (voir définition de v_n). La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(b) Donner l'expression de v_n en fonction de n , puis justifier l'expression $u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme, $v_0 = u_0 - 4 \times 0 + 10 = 11$, ainsi pour tout entier naturel n , on a $v_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Aussi, $v_n = u_n - 4n + 10 \Leftrightarrow u_n = v_n + 4n - 10 \Leftrightarrow u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, où n est un entier naturel.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $S_n = 2n^2 - 8n + 12 - \frac{11}{2^n}$.

$$S_n = \sum_{i=0}^n \left[11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^i + 4i - 10 \right] = \sum_{i=0}^n 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^i + \sum_{i=0}^n (4i - 10)$$

La première somme est celle de $(n + 1)$ termes d'une suite géométrique (v_n) , la deuxième est celle de $(n + 1)$ d'une arithmétique de raison 4 et de premier terme -10 , d'après les propriétés (voir récapitulatif donné en début d'année),

$$\sum_{i=0}^n 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^i = 11 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 22 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 22 - \frac{22}{2^{n+1}} = 22 - \frac{11}{2^n}$$

$$\sum_{i=0}^n (4i - 10) = \frac{(n + 1)(-10 + 4n - 10)}{2} = \frac{2(2n - 10)(n + 1)}{2} = (2n - 10)(n + 1) = 2n^2 - 8n - 10$$

$$\text{Enfin, } S_n = 22 - \frac{11}{2^n} + 2n^2 - 8n - 10 = 2n^2 - 8n + 12 - \frac{11}{2^n}.$$

5. Calculer la limite de la suite (S_n) .

On a $2n^2 - 8n + 12 = n \left(2n - 8 + \frac{12}{n} \right)$, (pour lever la F.I : $+\infty - \infty$).

D'une part $\begin{cases} \lim_n n = +\infty \\ \lim_n 2n - 8 + \frac{12}{n} = +\infty \end{cases}$, et par produit $\lim_n u_n = +\infty$ et d'autre part $\lim_n -\frac{11}{2^n} = 0$, car $0 < \frac{1}{2} < 1$

Ainsi, par somme $\lim_n S_n = +\infty$.