

Préparation au DS-2 : Suites numériques

EXERCICE 1 : 4 points

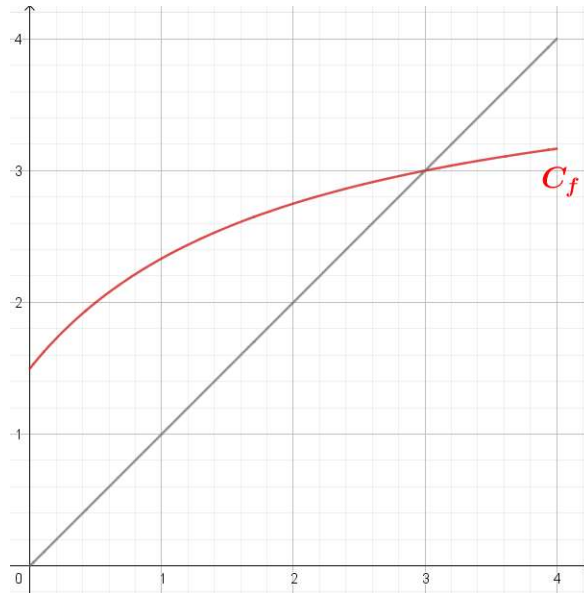
Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = -n + (-1)^n$
2. $u_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$
3. $u_n = \frac{2n + 10}{n^2 + 5n - 5}$
4. $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$

Exercice 2 (1,5 + 2 + 1 + 0,75 + 0,75 + (1 + 0,5 + 1,5)) = 9 points

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_0 = 0,5$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, avec f la fonction définie sur $[0; 4]$, par $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$.

- 1) Sur le graphique, représenter en vert, sur l'axe des abscisses les termes U_0, U_1, U_2 et U_3 , puis émettre une conjecture concernant la monotonie de (U_n) ainsi que sa limite ?



- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 < U_n < 3$.
(Aidez-vous des variations de f sur $[0; 4]$)
- 3) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_{n+1}-3)(U_n-3)}{U_{n+1}+2}$.
- 4) En déduire que la suite (U_n) est croissante.
- 5) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ . Énoncez la propriété mobilisée !
- 6) On admet que cette limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
 - a. Déterminer la valeur de ℓ .
 - b. Que fait cet algorithme ci-dessous ?
 - c. Le tester à la calculatrice avec $p = 0,01$. Indiquer à chaque étape le contenu des variables U et n en complétant le tableau suivant :

n	0					
U	0,5					
$3 - U$						

```

1 def seuil(p):
2     n=0
3     U=0.5
4     while 3-U>p:
5         n=n+1
6         U=(4*U+3)/(U+2)
7     return(n)
    
```

Exercice 3 $(1 + (0,5 + 1,5) + (1,5 + 1) + 1,5) = 7$ points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2.

(a) Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n . (Pensez à simplifier vos calculs).

(b) Compléter les lignes 2, 3, 4 et 5 de la fonction Python ci-dessous pour qu'elle calcule et renvoie la valeur de u_n , où n est un entier naturel saisi par l'utilisateur.

```
1 def u(n):  
2     u=....  
3     for i in range(...):  
4         u=.....  
5     return(...)
```

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 4n + 10$.

(a) Montrer que (v_n) est géométrique, en préciser la raison.

(b) Donner l'expression de v_n en fonction de n , puis justifier l'expression $u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, où n est un entier naturel.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $S_n = 2n^2 - 8n + 12 - \frac{11}{2^n}$.

5. Calculer la limite de la suite (S_n)