

Exercice 1: (2pts) (18pts)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (0,5) 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (0,5)

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ (0,5) 4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ (0,5)

Exercice 2: (5pts)

1. $f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f(x) = x(x+2)$ (bas utile)

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (1)

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ par somme. (1)

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty$ (1)

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$ (0,5)
 par somme: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6 + e^{-x} = 6$ (0,5)
 $\left. \begin{array}{l} \text{par quotient,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{6 + e^{-x}} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{6 + e^{-x}} = \frac{1}{2}$ (1,5)

Exercice 3: (5pts)

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 1 = 1$

(1,5)

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = 0$

Par quotient

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$

0,5 La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

a. $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$ 0,5

(1,5)

b.

Par somme:

$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

Par produit

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

3. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

a. $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(x + \frac{1}{x} \right)}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}$ car $x \neq 0$ 0,5

b

Par somme:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$

Par quotient

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale
d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4: (6,5 pts)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}.$$

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ ou } x \neq -2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}}.$$

2. a $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4} \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{1 - \frac{4}{x^2}}$, pour $x \neq 0$.
(4) 0,5

* Limite en $+\infty$:

(2) Par somme:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{x^2} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Par quotient} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \end{array} \right\} \quad (1)$$

* Limite en $-\infty$:

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ 0,5

Signe de " $x^2 - 4$ ":

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
Signe de $x^2 - 4$	+	ϕ	ϕ	+

* limite en 2; $x > 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 = 12 \\ x > 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 = 0^+ \end{array} \right\}$$

Par quotient

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty \quad 0,5$$

* limite en 2, $x < 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 = 12 \\ x < 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 = 0^- \end{array} \right\}$$

Par quotient

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \quad 0,5$$

(2)

* limite en -2, $x < -2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2} 3x^2 = 12 \\ x < -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 4 = 0^+ \end{array} \right\}$$

Par quotient

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty \quad 0,5$$

* limite en -2, $x > -2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2} 3x^2 = 12 \\ x > -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 4 = 0^- \end{array} \right\}$$

Par quotient

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty \quad 0,5$$

b. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

(1,5) Il y a 2 asymptotes verticales d'équation $x = 2$ et $x = -2$. $0,5 \times 2$