

Éléments de correction

Tout ce qui est écrit en italique dans la correction qui suit n'est pas exigible, en termes de rédaction, au niveau terminale.

Exercice 1 : fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 18$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f sur son ensemble de dérivabilité.

f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4 \times (3x^2) - 9 \times (2x) - 12$

$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12$.

2. En déduire les variations de f . Dresser le tableau de variations de f .

$f'(x)$ est une fonction polynôme du second degré à coefficients réels, avec $a = 12$, $b = -18$ et $c = -12$.

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \times 12 \times (-12) = 900$.

$\Delta > 0$, $f'(x)$ admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 - 30}{24} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 + 30}{24} = 2.$$

De plus, le coefficient de x^2 est $a = 12$. $a > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de a , soit positif, à l'extérieur de ses racines et négatif entre ses racines. On en conclut alors que f est strictement croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et sur $[2; +\infty[$ et

strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2}; 2]$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+
Variations			$\frac{85}{4}$			$+\infty$
de		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
f	$-\infty$				-10	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 18 = \frac{85}{4}$$

$$f(2) = 4 \times 8 - 9 \times 4 - 12 \times 2 + 18 = -10$$

3. (a) La fonction f étant dérivable en 1, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$$

Or, $f'(1) = -18$ et $f(1) = 1$, donc $\mathcal{T}$ a pour équation réduite $y = -18(x - 1) + 1$, c'est-à-dire : $y = -18x + 19$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- d'une part : $d(x) = f(x) - (-18x + 19) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 18 + 18x - 19 = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$
- d'autre part : $(x - 1)(4x^2 - 5x + 1) = 4x^3 - 5x^2 + x - 4x^2 + 5x - 1 = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$.

Les deux résultats étant identiques, on en conclut que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, d(x) = f(x) - (-18x + 19) = (x - 1)(4x^2 - 5x + 1).$$

- (c) • Sur $\mathbb{R}$, $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $4x^2 - 5x + 1$ est un polynôme du second degré à coefficients réels, avec $a = 4$, $b = -5$ et $c = 1$.
Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9$. $\Delta > 0$, donc ce polynôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 3}{8} = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{8} = 1$.
De plus, le coefficient du terme en x^2 est $a = 4$. Donc $4x^2 - 5x + 1$ est du signe de a , soit positif, sauf entre ses racines.

On a alors :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$	
Signe de $x - 1$	-	-	0	+	
Signe de $4x^2 - 5x + 1$	+	0	-	0	+
Signe de $d(x)$	-	0	+	0	+

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(x) = f(x) - (-18x + 19)$. Par conséquent :

- $d(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > -18x + 19 \Leftrightarrow \mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{T}$
- $d(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < -18x + 19 \Leftrightarrow \mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$

Donc $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{T}$ sur $\left] \frac{1}{4} ; 1 \right[$ et sur $]1 ; +\infty[$, $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{T}$ sur $] -\infty ; \frac{1}{4} [$ et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ sont sécantes aux points d'abscisses $\frac{1}{4}$ et 1.

Exercice 2 : fonction exponentielle

1. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $A = e^{3x} \times e^{-4x} = e^{3x-4x} = e^{-x}$

(b) $B = \frac{1}{(e^{-x})^6} = \frac{1}{e^{-6x}} = e^{6x}$

(c) $C = \frac{e^{3-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}} = e^{3-2x+5x-(x-2)} = e^{3-2x+5x-x+2} = e^{5+2x}$

(d) $D = \frac{e \times e^{2x-1}}{2e^{-x-2}} = \frac{e^1 \times e^{2x-1}}{2e^{-x-2}} = \frac{1}{2} e^{1+2x-1-(-x-2)} = \frac{1}{2} e^{1+2x-1+x+2} = \frac{1}{2} e^{3x+2}$

2. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = xe^{-2x} + 3x - 1$.

La fonction f est construite à partir de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-2x}$. Alors $xe^{-2x} = u(x) \times v(x)$, avec :

- $u'(x) = 1$
- si $w(x) = -2x$ alors $(e^w)' = w' \times e^w$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = -2$, donc $v'(x) = -2e^{-2x}$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (u'v + uv')(x) + 3 = 1 \times e^{-2x} + x \times (-2e^{-2x}) + 3 = (1 - 2x)e^{-2x} + 3$.

Remarque : il est possible de dériver directement, sans introduire la fonction w .

(b) $g(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

g est définie pour tout réel x tel que $e^x - 1 \neq 0$

Or $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

g est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

g est de la forme $2 \times \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = e^x - 1$

$u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

On a donc $g' = 2 \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 2 \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 2 \frac{e^x \times e^x - e^x - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 2 \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $e^{2x} = e^{4x-7}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$e^{2x} = e^{4x-7} \Leftrightarrow 2x = 4x - 7$

$e^{2x} = e^{4x-7} \Leftrightarrow 7 = 2x$

$e^{2x} = e^{4x-7} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

(b) Sur $\mathbb{R}$:

$$e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \text{ ou } e^x - 1 = 0$$

$$e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \text{ puisque } e^x = 0 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R}$$

$$e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^0 = 0$$

$$e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ la fonction exponentielle étant strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \boxed{S = \{0\}}$$

(c) $e^{x^2} = e^{x-3}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$e^{x^2} = e^{x-3} \Leftrightarrow x^2 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0.$$

$x^2 - x + 3 = 0$ est une équation du second degré à coefficients réels, avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 3$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 12 = -11$.

$\Delta < 0$, donc l'équation $x^2 - x + 3 = 0$ n'admet pas de solution réelle. $\boxed{S = \emptyset}$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^x$.(a) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

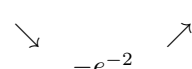
On a donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de e^x	+	+	+
Signe de $1+x$	-	0	+
Signe de $f(x)$	-	0	+

(b) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition. f produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ f est de la forme uv donc $f' = u'v + v'u$ avec $u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$.Pour tout réel x , $f'(x) = 1 \times e^x + (1+x)e^x$

$$\text{Pour tout réel } x, f'(x) = (x+2)e^x$$

Sur $\mathbb{R}$, $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. On a alors :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de e^x	+	+	+
Signe de $x+2$	-	0	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$ et strictement croissante sur $[-2; +\infty[$

Exercice 3 : algo et suite

On considère l'algorithme suivant :

```

def suite(n) :
    u=6
    for k in range(n) :
        u=3*u-2
    return u

```

1. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$?

On a

u	6	16	46	136
k		0	1	2

Pour $n = 3$, on obtient 1362. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2$.La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?Avec l'algorithme ci-dessus on a calculé u_1, u_2 et u_3 Ainsi on a $u_1 - u_0 = 16 - 6 = 10$ et $u_2 - u_1 = 46 - 16 = 30$ $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.On a $u_1 = \frac{16}{6}u_0$ or $\frac{16}{6}u_1 = \frac{128}{3}$ et $u_2 \neq \frac{128}{3}$. La suite (u_n) n'est donc pas géométrique.

Exercice 4 : suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2 . Donner les trois termes suivants à l'aide de la calculatrice.

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 10 + 7 = 12$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \times 12 + 7 = 13$$

Avec la calculatrice, on obtient :

$$u_3 = 13,5; u_4 = 13,75 \text{ et } u_5 = 13,875.$$

- (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

$$u_1 - u_0 = 12 - 10 = 2 \text{ et } u_2 - u_1 = 13 - 12 = 1 \text{ donc } u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \text{ et la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}$$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 14$.

- (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

Deux propositions de rédaction pour cette question :

Première rédaction :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 14 = \frac{1}{2}u_n + 7 - 14 = \frac{1}{2}u_n - 7$$

Or, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 14$, donc $u_n = v_n + 14$. En remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient alors :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 7 = \frac{1}{2}(v_n + 14) - 7 = \frac{1}{2}v_n + 7 - 7 = \frac{1}{2}v_n.$$

Deuxième rédaction :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 14 = \frac{1}{2}u_n + 7 - 14 = \frac{1}{2}u_n - 7$$

$$\text{Donc, pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 7 = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{7}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(u_n - 7 \times 2) = \frac{1}{2}(u_n - 14) = \frac{1}{2}v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$

- (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$, alors pour tout entier naturel

$$n, v_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 14 \text{ donc } u_n = v_n + 14. \quad \boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 14}$$

3. On considère $S_n = \sum_{i=0}^n v_i = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $T_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Donner les expressions de S_n puis de T_n en fonction de n .

$$S_n = \sum_{i=0}^n v_i \text{ et comme } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = -4 \text{ alors :}$$

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = -4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = -8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, S_n = 8 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)}$$

D'autre part, pour tout entier naturel n :

$$T_n = \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{i=0}^n (v_i + 14) = (v_0 + 14) + (v_1 + 14) + \dots + (v_n + 14) = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 14 \times (n+1) \text{ puisque la somme contient } (n+1) \text{ termes.}$$

$$\text{Donc : } T_n = S_n + 14(n+1) = 8 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) + 14(n+1) \text{ et } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, T_n = 8 \times \frac{1}{2^{n+1}} + 14n + 6}$$