

Rationnels

► Pour tous réels a et b , pour tout réel $c \neq 0$: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

► Pour tous réels a, b et c , avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

► Pour tous réels a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

► Pour tous réels a, b, c et d avec $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Seule la somme nécessite une réduction au même dénominateur.

1 Cocher la bonne case.

a. $\frac{50}{3} + \frac{7}{12} = \frac{57}{15}$

Vrai ☐ Faux ☒

c. $\frac{35}{9} \div \frac{7}{5} = \frac{49}{9}$

Vrai ☐ Faux ☒

b. $\frac{3}{4} \times \frac{6}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

Vrai ☒ Faux ☐

d. $\frac{7}{4} - 8 \times \frac{3}{100} = \frac{151}{100}$

Vrai ☒ Faux ☐

2 Effectuer les calculs, puis dire si le nombre obtenu est un décimal.

a. $\frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{5}}{\frac{7}{3} - \frac{1}{21}} = \frac{\frac{10}{10} - \frac{8}{10}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{21}} = \frac{-\frac{147}{10}}{-\frac{1}{21}} = \frac{147}{10}$ est un nombre décimal.

b. $\frac{5^2}{2} + \frac{9}{5} \times \frac{12}{81} = \frac{25}{2} + \frac{12}{45} = \frac{383}{30}$ n'est pas un nombre décimal.

c. $\frac{1}{4} - \left(\frac{2}{-15}\right) \times \frac{7}{8} = \frac{3}{4} + \frac{7}{60} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}$ n'est pas un nombre décimal.

3 Effectuer le calcul de $F = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$.

F est-elle une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près ? Vérifier avec une calculatrice.

$F = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{5}{12}}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29} \approx 1,413$. Avec la calculatrice $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

Donc F est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.

Puissances

a et b désignent des nombres réels, m et n des nombres entiers relatifs.

► $a^m \times a^n = a^{m+n}$

► $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

► $(a^m)^n = a^{m \times n}$

► $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

► $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ avec $b \neq 0$.

► Si $a \neq 0$ alors $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

1 Cocher la (ou les) réponse(s) exacte(s).

a. $5^7 \times (5^3)^2$ est égal à : ☐ $5^7 \times 5^5$ ☒ $5^7 \times 5^6$ ☐ 5^{12} ☒ 5^{13}

b. $\frac{(-3)^5}{3^7 \times 3}$ est égal à : ☒ -3^{-3} ☐ 3^{-3} ☐ $-\frac{1}{3^2}$ ☒ $-\frac{1}{3^3}$

c. Pour tous réels a et b non nuls, $\frac{ab^6}{(ab)^4}$ est égal à :

☐ $\frac{1}{a^2 b^2}$

☐ $(ab)^2$

☐ $a^{-4} b^2$

☒ $a^{-3} b^2$

d. Pour tous réels a et b non nuls, $\left(\frac{a^2}{a \times b^3}\right)^4 \times b$ est égal à :

☒ $a^4 b^{-11}$

☐ $\frac{a^8}{b^6}$

☐ $\frac{a^7}{b^{11}}$

☒ $\left(\frac{a^4}{b^{12}}\right) \times b$

2 Cocher l'intrus dans chaque série.

a.

☐ $3,5 \times 10^4$ ☐ 35 000

☐ $\frac{35}{10^{-3}}$ ☒ $0,035 \times 10^{-2}$

b.

☐ $(-4)^3$ ☒ 4^3

☐ $\frac{-4^5 \times 4^6}{(4^2)^4}$ ☐ $\frac{4^{-8}}{(-4)^{-11}}$

c.

☐ $(2 \times 3)^{-1}$ ☐ $\frac{6^{10}}{6^7 \times 6^4}$

☒ 6 ☐ $6^5 \times \frac{6^{-4}}{6^2}$

3 Calculer A et B sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 5.

A = $\frac{5^7 \times 10^{-4} \times 3^9}{10^{-5} \times 3^7 \times 5^{10}}$

= $5^{-3} \times 10 \times 3^2$

= $5^{-3} \times 2 \times 5 \times 3^2$

= $2 \times 5^{-2} \times 3^2$

B = $\frac{(-6)^4 \times 15^4 \times (-16)^3}{25 \times 12^3}$

= $\frac{6^4 \times 15^4 \times 16^3}{5^2 \times 2^6 \times 3^3}$

= $\frac{2^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 5^4 \times 2^{12}}{5^2 \times 2^6 \times 3^3}$

= $-2^{10} \times 3^5 \times 5^2$

Développements

Pour **développer une expression** dans un calcul littéral, on peut utiliser :

- la distributivité : $k(a + b) = ka + kb$
- la double distributivité : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- les identités remarquables :
 - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1 Cocher la bonne case. Justifier si la réponse est fausse.

Vrai Faux

- a. Le développement de $3x(x - 8) - (10 + x)(4x - 5)$ est $-x^2 + 59x - 50$. ☐ ☒ c'est $-x^2 - 59x + 50$
- b. Le développement de $(-x - 8)^2$ est le même que celui de $(x + 8)^2$. ☒ ☐
- c. $x^2 + 36 - 12x$ est le carré de $x - 6$. ☒ ☐
- d. $25x^2 - 81$ est égal au produit de $5x - 9$ par $5x - 9$. ☐ ☒ c'est le produit de $5x - 9$ par $5x + 9$

2 Développer les expressions.

$$A = (x + 1)(x - 4) - 5(x + 3) = x^2 - 4x + x - 4 - 5x - 15 = x^2 - 8x - 19$$

$$B = (4x - 5)^2 = (4x)^2 - 2 \times (4x) \times (5) + (5)^2 = 16x^2 - 40x + 25$$

$$C = (10x - 6)(10x + 6) = (10x)^2 - (6)^2 = 100x^2 - 36$$

$$D = (7x + 3)^2 = (7x)^2 + 2 \times (7x) \times 3 + (3)^2 = 49x^2 + 42x + 9$$

3 Développer et simplifier les expressions.

$$E = (6x - 3)^2 + (4x - 5)(4x + 5) = 36x^2 - 36x + 9 + 16x^2 - 25 = 52x^2 - 36x - 16$$

$$F = (7x - 3)^2 - (2x + 3)^2 = 49x^2 - 42x + 9 - (4x^2 + 12x + 9) = 49x^2 - 42x + 9 - 4x^2 - 12x - 9 = 45x^2 - 54x$$

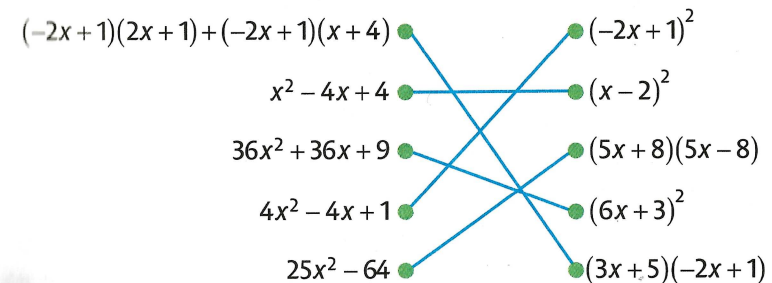
Factorisations

Pour **factoriser une expression** dans un calcul littéral, on reconnaît :

- un facteur commun : $ka + kb = k(a + b)$ avec k, a, b réels.
- une identité remarquable :
 - $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
 - $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
 - $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

On peut aussi combiner les deux méthodes pour factoriser une expression.

1 Relier chaque expression à sa forme factorisée.



2 Factoriser les expressions.

$$A = 25x^2 + 5x = 5x(5x + 1)$$

$$B = (2x + 8)(x - 4) + (x - 4)^2 = (x - 4)[(2x + 8) + (x - 4)] = (x - 4)(3x + 4)$$

$$C = 16x^2 - 64x + 64 = 16(x^2 - 4x + 4) = 16(x - 2)^2$$

$$D = 81x^2 - 16 = (9x)^2 - (4)^2 = (9x - 4)(9x + 4)$$

3 Factoriser les expressions.

$$A = 9x^2 - 1 + (3x - 1)(x + 6) = (3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)(x + 6) = (3x - 1)[(3x + 1) + (x + 6)] = (3x - 1)(4x + 7)$$

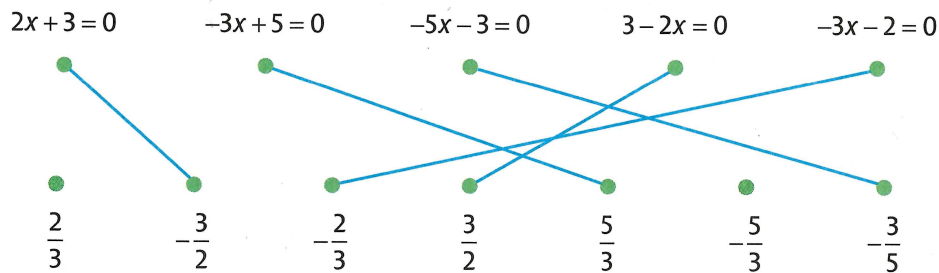
$$B = (2x - 1)(x + 3) - 2x + 1 = (2x - 1)(x + 3) - (2x - 1) = (2x - 1)[(x + 3) - 1] = (2x - 1)(x + 2)$$

$$C = (3x - 4)(2x + 3) - (4 - 3x)(x - 7) = (3x - 4)(2x + 3) + (3x - 4)(x - 7) = (3x - 4)(2x + 3 + x - 7) = (3x - 4)(3x - 4) = (3x - 4)^2$$

Équations du premier degré

- ▶ L'équation $ax + b = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ a une **unique solution** $x = -\frac{b}{a}$.
- ▶ Si on **ajoute** (ou on **retranche**) un **même nombre** aux deux membres d'une équation, on obtient une **équation équivalente**.
- ▶ Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une équation par un **même nombre non nul**, on obtient une **équation équivalente**.

1 Relier chacune des équations suivantes à sa solution.



2 Résoudre les équations suivantes.

a. $4x - 1 = 2x + 8 \Leftrightarrow 4x - 2x = 9$

$\Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

b. $2x + 7 = 5 - 3x \Leftrightarrow 2x + 3x = 5 - 7$

$\Leftrightarrow 5x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

3 Si l'on augmente de 2 cm le côté d'un carré, son aire augmente de 8 cm². Quelle est la mesure du côté du carré initial ?

Soit x la longueur du côté du carré initial. L'aire du carré final est :

$(x+2)^2 = x^2 + 8 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8 \Leftrightarrow 4x = 8 - 4 \Leftrightarrow x = 1$.

La mesure du côté du carré initial est donc 1 cm.

Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie « est équivalent à ».

Équations produit nul et quotient

- ▶ L'équation produit $A \times B = 0$ est équivalente à $A = 0$ ou $B = 0$.
- ▶ L'équation quotient $\frac{A}{B} = 0$ est équivalente à $A = 0$ et $B \neq 0$.

1 Cocher la (ou les) réponse(s) exacte(s).

a. $2x(5-2x) = 0$ a pour solution : ☐ $\left\{2; \frac{5}{2}\right\}$. ☒ $\left\{0; \frac{5}{2}\right\}$. ☐ $\left\{0; \frac{2}{5}\right\}$.

b. $(3x-4)(x+5) = 0$ a pour solution : ☒ $\left\{\frac{4}{3}; -5\right\}$. ☐ $\left\{-\frac{4}{3}; -5\right\}$. ☐ $\left\{\frac{3}{4}; -5\right\}$.

c. $\frac{3x+6}{x-7} = 0$:

☒ existe si $x \neq 7$.

☐ a pour solutions -2 et 7.

☒ a pour solution -2.

d. $\frac{x-4}{x^2-1} = 0$:

☒ existe si $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

☐ a pour solutions 4; -1 et 1.

☒ a pour solution 4.

2 Résoudre les équations suivantes.

a. $4x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)(2x+5) = 0$

$\Leftrightarrow 2x-5=0$ ou $2x+5=0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$

b. $7x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(7x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $7x-5=0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{5}{7}$

c. $\frac{5-2x}{8x+1} = 0 \Leftrightarrow 5-2x=0$ et $8x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{8}$.

3 On admet que pour tout réel $x \neq -1$, on a $3x+4 - \frac{2}{x+1} = \frac{(3x+1)(x+2)}{x+1}$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = 3x+4$ et $g(x) = \frac{2}{x+1}$ pour $x \neq -1$.

Ce sont les points dont l'abscisse vérifie $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x+4 - \frac{2}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(3x+1)(x+2)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -2$. Si $x = -\frac{1}{3}$ alors $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$.

Si $x = -2$ alors $f(-2) = -2$. Les points sont $A\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$ et $B(-2; -2)$.

Inéquations du premier degré

- L'inéquation $ax + b < 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ a pour **ensemble solution** $]-\infty; -\frac{b}{a}[$.
- L'inéquation $ax + b \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ a pour **ensemble solution** $[-\frac{b}{a}; +\infty[$.
- On peut **additionner** (ou **soustraire**) un **même nombre** aux deux membres d'une inégalité **sans en changer le sens**.
- On peut **multiplier** (ou **diviser**) les deux membres d'une inégalité par un **même nombre strictement positif sans en changer le sens**.
- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une inégalité par un **même nombre strictement négatif, on doit changer le sens** de l'inégalité.

1 Cocher l'intrus pour chaque inéquation.

- a. Pour $-3x + 5 > 0$: ☐ $x < \frac{5}{3}$. ☒ $S =]\frac{5}{3}; +\infty[$. ☐ -2 est une solution.
- b. Pour $2x + 3 < 0$: ☒ $x < \frac{3}{2}$. ☐ $S =]-\infty; -\frac{3}{2}[$. ☐ -3 est une solution.
- c. Pour $3 - 2x \geq 0$: ☐ $x \leq \frac{3}{2}$. ☒ $S =]-\infty; \frac{3}{2}[$. ☐ -2 est une solution.

2 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $-3x + 4 < 0$

$-3x < -4$ donc $x > \frac{4}{3}$ donc $S =]\frac{4}{3}; +\infty[$

b. $-4x + 2 \leq 6x + 3$

$-4x - 6x \leq 3 - 2$ donc $-10x \leq 1$ donc $x \geq -\frac{1}{10}$ donc $S = [-\frac{1}{10}; +\infty[$

3 Une casserole cylindrique a pour diamètre 18 cm. Quelles sont les hauteurs possibles de cette casserole afin qu'elle contienne entre 2 et 3 L de liquide ? En déduire les valeurs entières possibles de h .

Le volume d'un cylindre est : $V = \pi R^2 h$. On a $D = 18 \text{ cm} = 2R$ donc $R = 9 \text{ cm}$ et

$R^2 = 81 \text{ cm}^2$ donc $V = 81\pi h \text{ cm}^3$. Or $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ et $2 \text{ L} \leq V \leq 3 \text{ L}$.

Donc $2000 \text{ cm}^3 \leq V \leq 3000 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow 2000 \text{ cm}^3 \leq 81\pi h \leq 3000 \text{ cm}^3$

$\Leftrightarrow \frac{2000}{81\pi} \text{ cm} \leq h \leq \frac{3000}{81\pi} \text{ cm}$ donc $7,9 \text{ cm} \leq h \leq 11,8 \text{ cm}$

Les valeurs entières possibles de h sont 8 cm, 9 cm, 10 cm et 11 cm.

Inéquations produit et quotient

Tableau de signes de $ax + b$:

avec $b \neq 0$ (voir ci-contre):

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

- **Signe d'un produit**: on étudie le signe de chacun des facteurs que l'on rassemble dans un tableau puis on applique la règle des signes.
- **Signe d'un quotient**: son signe est le même que celui du produit du numérateur par le dénominateur, en n'oubliant pas les valeurs interdites (double barre dans le tableau).

1 Cocher la (ou les) réponses exactes.

a. L'ensemble des solutions de $2x(5 - 2x) > 0$ est:

☐ $S =]-\infty; 0[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$ ☒ $S =]0; \frac{5}{2}[$ ☐ $S = [-\frac{5}{2}; 2]$

b. L'ensemble des solutions de $(3x - 4)(x + 5) \leq 0$ est:

☒ $[-5; \frac{4}{3}]$. ☐ $] -\infty; -5]$. ☐ $-5; \frac{4}{3}[$.

c. L'ensemble des solutions de $\frac{3x+6}{x-9} > 0$:

☒ existe si $x \neq 9$. ☐ existe si $x \neq -2$. ☒ a pour solution $] -\infty; -2[\cup]9; +\infty[$.

2 Compléter le tableau de signes ci-contre puis résoudre l'inéquation

$\frac{3x+9}{-3-5x} \geq 0$.

L'ensemble solution est:

$S = [-3; -\frac{3}{5}]$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{5}$	$+\infty$
$3x+9$	-	0	+	+
$-3-5x$	+	+	0	-
$\frac{3x+9}{-3-5x}$	-	0	+	-

3 Un mobile se déplace sur une droite graduée. Son abscisse $p(t)$ sur cette droite graduée (en mètres) en fonction du temps écoulé t (en minutes) depuis le départ est donnée par: $p(t) = t^2 - 4t - 12$.

1. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, on a $p(t) = (t-6)(t+2)$.

$(t-6)(t+2) = t^2 + 2t - 6t - 12 = t^2 - 4t - 12 = p(t)$

2. Compléter le tableau de signes de p sur $[0; +\infty[$ puis déterminer à quels instants $p(t) \geq 0$.

$p(t) \geq 0$ pour $t \geq 6 \text{ min}$.

t	0	6	$+\infty$
$t-6$	-	0	+
$t+2$	+	+	+
$p(t)$	-	0	+