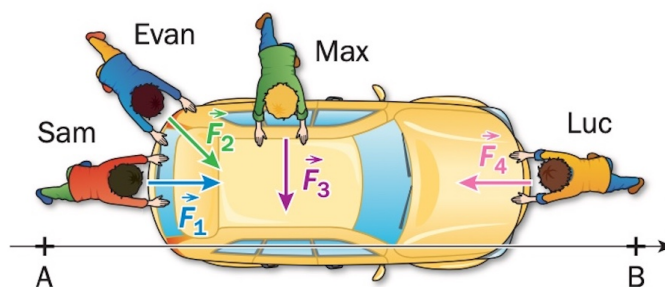


Activité 1

La voiture ci-contre est tombée en panne.

On souhaite la déplacer d'un point A vers un point B. Quatre personnes poussent cette voiture en exerçant des forces de même norme F mais avec des directions différentes. Chaque personne n'a pas la même efficacité pour déplacer la voiture de A vers B. On dit que ces forces $\vec{F}$ « n'échangent pas le même travail ».



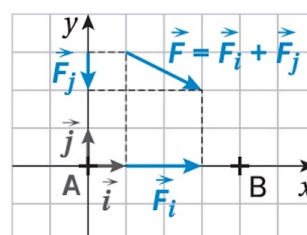
1. Classer ces personnes de la plus efficace à la moins efficace pour déplacer la voiture de A vers B ; expliquer ce classement.

Pour traduire l'efficacité de chaque force, on s'intéresse au projeté orthogonal $\vec{F}_i$ du vecteur $\vec{F}$ sur la droite (AB), qui est la seule composante du vecteur $\vec{F}$ qui influe sur le déplacement voulu de la voiture.

Les physiciens ont introduit au XIX^e siècle la notion de **travail d'une force** :

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ sur le trajet de A vers B est appelé **produit scalaire de $\vec{F}$ et de $\vec{AB}$** .
Il se note $\vec{F} \cdot \vec{AB}$ et il vaut :

- $\|\vec{AB}\| \times \|\vec{F}_i\|$ si $\vec{AB}$ et $\vec{F}_i$ ont le même sens ;
- $-\|\vec{AB}\| \times \|\vec{F}_i\|$ si $\vec{AB}$ et $\vec{F}_i$ sont de sens opposés.

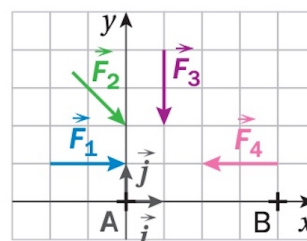


2. On a reproduit ci-contre les forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$.

a. Reproduire le schéma et construire le projeté orthogonal de chaque vecteur sur la droite (AB).

b. Calculer le produit scalaire $\vec{F}_k \cdot \vec{AB}$ pour k allant de 1 à 4.

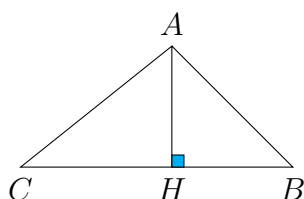
c. Vérifier la réponse donnée à la question **1**.



PARTIE A – PREMIERS CALCULS DE PRODUITS SCALAIRES

Exercice 1

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A . On a : $AB = 6$, $BH = 4$ et $HC = 5$.



Calculer les produits scalaires suivants :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ | 3) $\vec{AH} \cdot \vec{AC}$ | 5) $\vec{HB} \cdot \vec{CB}$ |
| 2) $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$ | 4) $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ | 6) $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$ |

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de côté 5. Calculer les produits scalaires suivants :

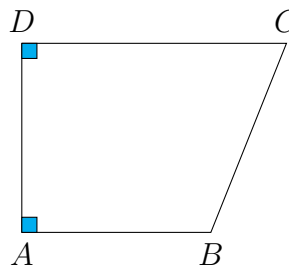
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \qquad \vec{BA} \cdot \vec{BD} \qquad \vec{BC} \cdot \vec{BD}$$

Exercice 3

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = AD = 5$ et $DC = 7$.

Calculer les produits scalaires suivants :

- | | |
|--|--|
| 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ | 4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ |
| 2) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$ | 5) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$ |
| 3) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ | 6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ |



PARTIE B – PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Exercice 4

Les écritures suivantes n'ont pas de signification mathématique. Pour quelle(s) raison(s) ?

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$ | 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v})$ | 3) $\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{v})$ | 4) $\vec{v} \cdot \overrightarrow{u + v}$ |
|--|--|--|---|

Exercice 5

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Calculer chacune des expressions suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1) $\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$ | 5) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$ |
| 2) $(5\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$ | 6) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) - (\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{v}$ |
| 3) $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$ | 7) $\ 2\vec{u} - \vec{v}\ ^2$ |
| 4) $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$ | 8) $\ \vec{u} + 3\vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - 3\vec{v}\ ^2$ |

PARTIE C – AUTRES CALCULS DE PRODUITS SCALAIRES

Exercice 6

Dans chacun des deux cas suivants, déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.

- | | |
|--|--|
| 1) $CA = 8$, $CB = 4$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 12$. | 2) $CA = 5$, $CB = 8$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -6$. |
|--|--|

Exercice 7

On se place dans un repère orthonormé. Soient les points $A(0;4)$, $B(6;3)$ et $C(-5;-2)$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC .
- 2) En déduire une valeur en degrés de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 8

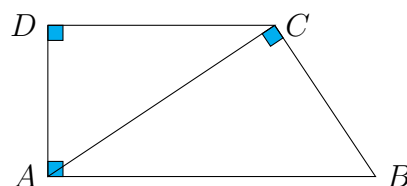
$ABCD$ est un parallélogramme tel que : $AB = 4$, $AD = 2$ et $\widehat{BAD} = 45^\circ$.

- 1) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
- 2) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 9

$ABCD$ est un trapèze rectangle dont la diagonale $[AC]$ est perpendiculaire au côté $[BC]$.

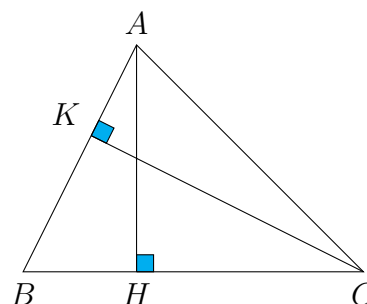
En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes, démontrer que $AC^2 = AB \times CD$.

**Exercice 10**

ABC est le triangle ci-contre. H est le pied de la hauteur issue de A et K est le pied de la hauteur issue de C .

On a de plus : $HA = 4$, $HB = 2$ et $HC = 4$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- 2) Calculer la longueur BK .



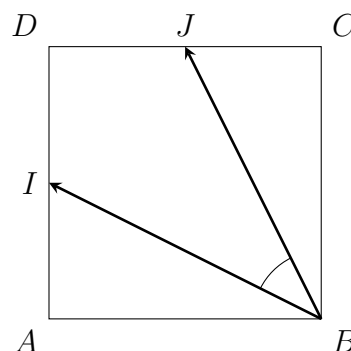
PARTIE D – POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 11

$ABCD$ est un carré de côté 4.

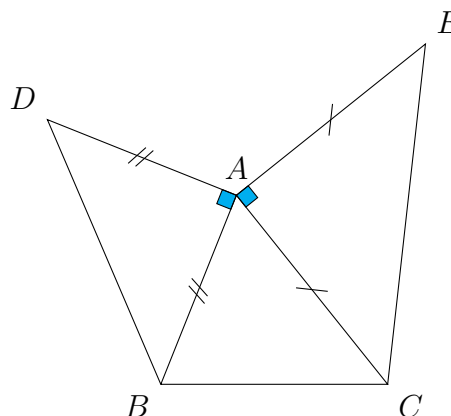
I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[CD]$.

- 1) Démontrer que $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 64$.
- 2) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ}$.
- 3) Démontrer que $BI = 2\sqrt{5}$.
- 4) Déterminer alors la valeur approchée par excès au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{IBJ}$.

**Exercice 12**

ABC est un triangle. On construit les deux triangles BAD et EAC , directs rectangles et isocèles en A .

- 1) Démontrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 2) En déduire que les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires.



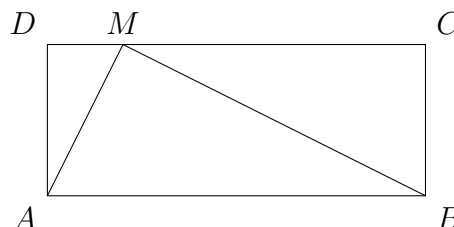
Exercice 13

Soit ABC un triangle quelconque.

- 1) Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
- 2) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 14

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 5$ et $AD = 2$.
 M est le point du segment $[CD]$ tel que $CM = 4$. On se propose de démontrer de trois façons différentes que le triangle ABM est rectangle.



- 1) Avec le théorème de Pythagore.
- 2) Avec la géométrie analytique dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
- 3) En développant et en simplifiant : $(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB})$.