Devoir maison n°3

À rendre le mardi 9 mai 2023

Exercice 1. (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3x-1)\mathrm{e}^{2x}$.

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$ soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 1$.

Exercice 2. (6 points)

On considère l'équation différentielle $(E)\colon\ y' + 3y = 6x^2 + 7x - 2$.
Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = 2x^2 + x - 1$.

1. Montrer que la fonction p est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Soit f une solution de (E). Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - p(x)$ est une solution de l'équation différentielle $(E')\colon\ y' + 3y = 0$.

3. Réciproquement, montrer que si la fonction g est solution de $(E')\colon\ y' + 3y = 0$, alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(x) + p(x)$ est une solution de (E).

4. Résoudre l'équation différentielle (E').

5. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 3. (9 points)

Un pépiniériste repique un plant de tomates de 10 cm de haut sous une serre. On observe qu'au bout de 15 jours, le plan de tomates mesure 0,19 m. On note $f(t)$ la taille, en mètre, d'un plant de tomates après t jours. On a donc $f(0) = 0,1$. Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\colon\ y' = \alpha y(1-y)$$

où α est une constante dépendant des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

- **a.** Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(F)\colon\ y' = -\alpha y + \alpha$.
- **b.** Résoudre l'équation différentielle (F) puis en déduire $g(t)$ en fonction de t.
- **c.** En déduire que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a : $f(t) = \dfrac{1}{9\mathrm{e}^{-\alpha t} + 1}$.

2. Montrer que le réel α vérifie : $\mathrm{e}^{-15\alpha} = \dfrac{9}{19}$.

3. On admet que $\alpha \simeq 0,05$. Ainsi, $f(t) = \dfrac{1}{9\mathrm{e}^{-0,05t} + 1}$.

- **a.** Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ en justifiant soigneusement. Interpréter cette limite dans le contexte.
- **b.** Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.
- **c.** Déterminer, au jour près, le nombre de jours à attendre pour que le plant de tomates atteigne 90 cm de haut. (on utilisera la fonction logarithme népérien)