

DS de Outils Mathématiques 3 17 janvier 2023

Calculatrice uniquement collègue autorisée – Tous documents interdits

Les exercices sont indépendants

Durée 2h00**Exercice 1 - Matrice inverse - Résolution de système linéaire (2 pts)**

- 1) La matrice A ci-dessous est-elle inversible? Si oui, calculer sa matrice inverse qu'on notera A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2) Utiliser ce résultat pour résoudre matriciellement le système

$$(S) : \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Exercice 2 - Matrice d'un endomorphisme (3,5 pts) On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x - 2z \\ -x - y + 2z \\ x - z \end{pmatrix}$$

- 1) On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice A de f dans cette base \mathcal{B} .

- 2) On considère les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

- 3) Vérifier que les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

- 4) Déterminer la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .

- 5) L'application f est-elle bijective?

Exercice 3 - Diagonalisation (6,5 pts)

- 1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

- Déterminer les valeurs propres de A (préciser leur multiplicité).
- Déterminer les sous-espaces propres de A en précisant leur dimension et une base.
- A est-elle diagonalisable? Si oui, donner la matrice diagonale D , ainsi que la matrice de changement de base P permettant de diagonaliser A . On précisera par quel calcul il est possible d'obtenir D à partir de A , mais il n'est pas demandé d'effectuer ce calcul ni de calculer P^{-1} .

2) On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- Déterminer les valeurs propres de B (préciser leur multiplicité).
- Déterminer les sous-espaces propres de B en précisant leur dimension et une base.
- B est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale D , ainsi que la matrice de changement de base P permettant de la diagonaliser. On précisera par quel calcul il est possible d'obtenir D à partir de B , mais il n'est pas demandé d'effectuer ce calcul ni de calculer P^{-1} .

Exercice 4 - Loi continue (2 pts) On considère une variable aléatoire X continue de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Représenter la fonction de densité f .
- Déterminer la fonction de répartition de X et la représenter dans un nouveau repère.
- Calculer la probabilité que X soit inférieure à 4.
- Calculer la probabilité que X soit comprise entre 1 et 4.

Exercice 5 - Loi normale (2,5 pts) (*cf. tables statistiques en annexe*)

Une petite entreprise (fictive) fabrique et conditionne de la moutarde en pots : une moutarde de Dijon, et une moutarde à l'ancienne.

Pour la moutarde de Dijon fabriquée par cette entreprise, une étude statistique (fictive) a permis d'établir que la demande mensuelle en Ile-de-France est distribuée selon une loi normale, avec une moyenne de 2000 pots par mois et un écart-type de 300 pots.

- Début janvier, on suppose que l'entreprise a en stock 2300 pots de moutarde de Dijon. Déterminer la probabilité que le nombre de pots vendus en janvier soit supérieur à 2300. En déduire la probabilité que l'entreprise ne soit pas capable de répondre à la demande pour le mois de janvier.
- L'entreprise veut s'assurer qu'elle ne sera pas en pénurie de stock plus de 5% du temps pour la moutarde de Dijon. Quel doit être le nombre minimum de pots stockés mensuellement pour respecter cette condition ?
- Pour la moutarde à l'ancienne, la demande est encore supposée distribuée selon une loi normale, de moyenne m inconnue, avec un écart-type de 300 pots. A partir d'un stock de 2000 pots de moutarde à l'ancienne, on a observé qu'il se produit une rupture de stock pendant 3 jours par mois (on suppose qu'un mois comporte 30 jours). Calculer la demande moyenne m du nombre de pots de moutarde à l'ancienne par mois.

Exercice 6 - Tests d'hypothèses (3,5 pts) (*cf. tables statistiques en annexe*)

Pour protéger la santé des consommateurs, les résidus de pesticides dans les aliments sont réglementés et ne doivent pas dépasser une LMR (limite maximale de résidus) fixée par chaque pays. On suppose que la LMR en Europe pour un pesticide A (fictif) est de 5 mg/kg. Monsieur Durand est producteur de pommes. Il reçoit tous les deux ans la visite d'un contrôleur sanitaire.

- 1) En 2022, le contrôleur sanitaire prélève 41 pommes chez M. Durand et mesure la quantité de pesticide A contenu dans chaque pomme. Il obtient pour cet échantillon de 41 pommes, une concentration moyenne de 5,100 mg/kg, et un écart-type de $\sigma_{ech} = 0,250$ mg/kg.
 - a) Donner une estimation ponctuelle de l'écart-type σ_{pop} de la concentration du pesticide A dans la production de pommes de M. Durand. On notera s cette estimation ponctuelle.
 - b) Peut-on considérer que les pommes produites par M. Durand en 2022 respectent le standard européen en matière de concentration de pesticides, avec un seuil de signification de 5% ? On suppose ici que σ_{pop} est connu et égal à 0,253 mg/kg
 - c) **BONUS** : Combien faudrait-il prélever de pommes chez M. Durand pour qu'une différence de 0,01 mg/kg avec le standard soit statistiquement significative au seuil de signification de 5% ?
- 2) En 2020, M. Durand avait été contrôlé sur un échantillon de 31 pommes dans lequel on avait relevé une concentration moyenne de pesticide A de moyenne identique à celle de 2022, c'est à dire de 5,100 mg/kg, mais un écart-type de $\sigma_{ech,2020} = 0,350$ mg/kg. La variabilité de la concentration du pesticide A dans la production de pommes a-t-elle été significativement modifiée entre 2020 et 2022, au seuil de signification de 5% ?