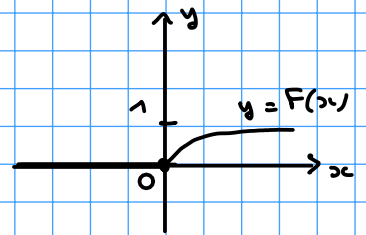
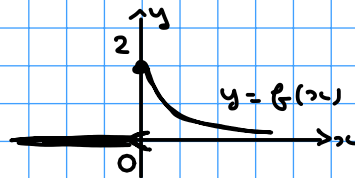


Ex 4. 1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



2) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^x 2e^{-2t} dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

si $x \geq 0$: $F(x) = [-e^{-2t}]_0^x = -e^{-2x} + 1$ d'où $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3) $P(X \leq 4) = F(4) = 1 - e^{-8}$

4) $P(1 \leq X \leq 4) = F(4) - F(1) = 1 - e^{-8} - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-8}$

Ex 5: 1) soit X la variable aléatoire représentant la demande mensuelle en moutarde de Dijon. on a: $X \sim N(2000, 300)$

Soit $Z = \frac{X - 2000}{300} \sim N(0, 1)$ Z est centrée et réduite

$P(X > 2300) = P(Z > \frac{2300 - 2000}{300}) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

La probabilité que l'entreprise ne réponde pas à la demande est de 15,87%

2) on cherche x_0 tel que $P(X \leq x_0) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{x_0 - 2000}{300}) \geq 0,95$

Or, on a $P(Z \leq 1,645) = 0,95$ donc on prend $\frac{x_0 - 2000}{300} \geq 1,645$

$\Leftrightarrow x_0 \geq 1,645 \times 300 + 2000 = 2493,5$. L'entreprise doit stocker au moins 2494 pots

3) soit Y la v.a. représentant la demande mensuelle de moutarde à l'ancienne. on a: $Y \sim N(m, 300)$

soit $T = \frac{Y - m}{300} \sim N(0, 1)$

$\frac{3}{30} = 0,1$ = pourcentage de temps où cette moutarde est en rupture de stock dans le mois.

$P(Y > 2000) = P(\frac{Y - m}{300} > \frac{2000 - m}{300}) = P(T > \frac{2000 - m}{300}) = 0,1$

$\Leftrightarrow 1 - P(T \leq \frac{2000 - m}{300}) = 0,1 \Leftrightarrow P(T \leq \frac{2000 - m}{300}) = 0,9$

or on a $P(T \leq 1,28) = 0,9$ donc $\frac{2000 - m}{300} = 1,28$

$\Leftrightarrow m = 2000 - 1,28 \times 300 = 1616$ pots = demande moyenne mensuelle de moutarde à l'ancienne

Ex 6. 1) en 2022: $n = 41$; $\bar{x} = 5,100$; $\sigma_{ech} = 0,250$

a) $\Delta = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma_{ech} = \sqrt{\frac{41}{40}} \times 0,250 = 0,253$ = estimation ponctuelle de σ_{pop}

b) Soit X la v.a. représentant la concentration de pesticide dans une pomme choisie au hasard.

Test de conformité sur la moyenne: Soit m la concentration moyenne du pesticide A dans la production de M. Durand.

Étape 1: Hypothèses: $\begin{cases} H_0: m = 5 \\ H_1: m \neq 5 \end{cases}$

seuil de signification
 $\alpha = 0,05$

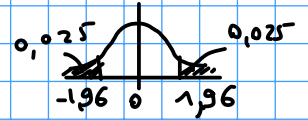
Étape 2: $m = 41 \geq 30$. La fonction discriminante du test sous H_0 est:

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\sigma_{pop}/\sqrt{m}} \sim N(0,1) \quad T = \frac{\bar{X} - 5}{\sigma_{pop}/\sqrt{41}} \quad \text{on prend } \sigma_{pop} \approx \Delta = 0,253$$

Étape 3: La zone d'acceptation au risque $\alpha = 0,05$ est $ZA = [-1,96; 1,96]$

Étape 4: Sur l'échantillon la v.a. T se réalise en

$$t = \frac{\bar{x} - 5}{\Delta/\sqrt{41}} = \frac{5,1 - 5}{0,253} \times \sqrt{41} = 2,53 \notin ZA$$



on rejette H_0 : la production n'est pas conforme

c) on fait l'hypothèse supplémentaire que X suit une loi normale.

$$\text{on a donc } \frac{\bar{X} - m}{\sigma_{pop}/\sqrt{m}} = \frac{\bar{X} - 0,5}{\sigma_{pop}/\sqrt{m}} \sim N(0,1)$$

on cherche m tel que $\frac{0,01}{\sigma_{pop}/\sqrt{m}} \notin [-1,96; 1,96] = ZA$ au risque 5%

$$\frac{0,01}{\sigma_{pop}/\sqrt{m}} > 1,96 \Leftrightarrow \frac{0,01 \cdot \sqrt{m}}{\sigma_{pop}} > 1,96 \Leftrightarrow \sqrt{m} > \frac{1,96 \cdot \sigma_{pop}}{0,01}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m} > 196 \cdot \sigma_{pop} \Leftrightarrow m > (196 \cdot \sigma_{pop})^2 = (196 \times 0,253)^2 = 2458,97$$

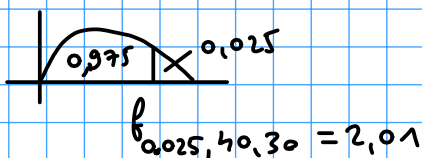
Il faudrait prélever au moins 2459 pannes

3) en 2022:	en 2020:
$m_a = 41$	$m_b = 31$
$\sigma_{ech,a} = 0,250$	$\sigma_{ech,b} = 0,350$
$\Delta_a = 0,253$	$\Delta_b = \sqrt{\frac{31}{30}} \times 0,350 = 0,356$

Test de conformité sur des variances: $\begin{cases} H_0: \sigma_{pop,a} = \sigma_{pop,b} \\ H_1: \sigma_{pop,a} \neq \sigma_{pop,b} \end{cases} \quad \alpha = 0,05$

• sous l'hypothèse H_0 $F = \frac{S_a^2}{S_b^2} \sim F(m_a - 1, m_b - 1) = F(40, 30)$

• la zone d'acceptation au risque $\alpha = 0,05$ est:



$f_{0,975, 40, 30} = \frac{1}{f_{0,025, 30, 40}} = \frac{1}{1,94}$

$$ZA = \left[\frac{1}{1,94}; 2,01 \right] = [0,52; 2,01]$$

• Sur l'échantillon F se réalise en $f = \frac{\Delta_a^2}{\Delta_b^2} = \frac{0,253^2}{0,356^2} = 0,51 \notin ZA$

on rejette H_0 . La variabilité a été modifiée significativement entre 2020 et 2022

Ex 1 1) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$ donc A est inversible.

La matrice inverse est: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{-1/3 L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right)$$

Ainsi: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

2) (S) s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc (S) a pour unique solution $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$

Ex 2: 1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 2z \\ -x - y + 2z \\ x - z \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \uparrow \uparrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \uparrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2) le déterminant de B' est:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1 \neq 0 \text{ donc } B' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

$$3) PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ donc}$$

P et Q sont inverses l'une de l'autre

4) P est la matrice de passage de B à B' et $Q = P^{-1}$

on a donc $A' = P^{-1}AP$

$$\begin{array}{ccccc} B' & \xrightarrow{P} & B & \xrightarrow{A} & B \xrightarrow{P^{-1}} B' \\ X' & \rightarrow & PX = X & \rightarrow & AX = Y \rightarrow P^{-1}Y = Y' = P^{-1}AX = P^{-1}APX' = A'X' \end{array}$$

$$A' = QAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) A' = QAP = P^{-1}AP \Leftrightarrow PA'P^{-1} = A$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PA'P^{-1}) = \det(P) \det(A') \det(P^{-1}) = \det(P) \det(P^{-1}) \det(A') \\ &= \det(PP^{-1}) \det(A') = \det(I) \det(A') = 1 \times \det(A') \end{aligned}$$

$$\det(A') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \det(A) \text{ donc } A \text{ n'est pas inversible}$$

donc f n'est pas bijective

ex 3: 1) a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 24$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1) - 24 = \lambda^2 - 1 - 24 = \lambda^2 - 25 = (\lambda-5)(\lambda+5)$$

2 valeurs propres $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -5$ toutes deux de multiplicité 1

b) les sous espaces propres sont $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ pour λ valeur propre

• $E_5 = \ker(A - 5I) = \ker \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_5 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -6x - 4y = 0 \Leftrightarrow 6x = -4y$

$\Leftrightarrow 3x = -2y \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}y$ donc $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

et $E_5 = \left\{ y \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ R \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, R \in \mathbb{R} \right\}$. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une base. $\dim E_5 = 1$

• $E_{-5} = \ker(A + 5I) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-5} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$ donc $u = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

$E_{-5} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. une base est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. $\dim(E_{-5}) = 1$

c) $\chi_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1 donc A est diagonalisable.

$D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ a) polynôme caractéristique $\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -3 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -3 \\ -\lambda & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_2-L_1}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda((1-\lambda)(3-\lambda) + 1) = -\lambda(3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

deux valeurs propres: $\lambda_1 = 0$ de multiplicité 1
 $\lambda_2 = 2$ de multiplicité 2

b) $E_0 = \ker(B)$; $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 3z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \stackrel{L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \stackrel{L_1-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ d'où } u = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E_0 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ une base est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\dim(E_0) = 1$

$E_2 = \ker(B - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y - 3z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y - 3z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3z = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \text{ d'où } u = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$E_2 = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$ une base est $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\dim E_2 = 1$

c) B n'est pas diagonalisable car $\dim E_2 \neq$ multiplicité de la valeur propre associée