

3 Exercices

3.1 Probabilités simples

Exercice 1 On tire au hasard une carte parmi un jeu de 52.

Calculer la probabilité d'obtenir :

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. un roi | 5. un trèfle ou un coeur ou un pique |
| 2. le valet de trèfle | 6. un trèfle ou un as |
| 3. l'as de coeur ou la dame de pique | 7. Ni 3 ni pique. |
| 4. un carreau | |

Exercice 2 On donne deux événements A et B tels que $P(A) = 0,8$ et $P(B) = 0,3$. Les événements A et B peuvent-ils être disjoints ?

Exercice 3 On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32.

Calculer la probabilité d'obtenir :

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. un honneur (10, valet, dame, roi ou as) | 3. un honneur à trèfle |
| 2. un trèfle | 4. un honneur ou un trèfle |

Exercice 4 On lance un dé truqué.

On note p_k la probabilité de l'événement : "le résultat du lancer est k ".

- Calculer p_k sachant que $p_1 = p_3 = p_5$ et $p_2 = p_4 = p_6 = 2p_5$.
- Calculer la probabilité
 - d'obtenir un résultat pair
 - d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 5.

Exercice 5 Dans un magasin l'observation des ventes sur une longue période a permis d'établir que la demande quotidienne de l'article A peut prendre les valeurs 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

On note p_k la probabilité qu'un jour choisi au hasard, la demande de l'article A soit de k pièces.

On suppose que $p_0 = p_6 = 0,04$; $p_1 = p_5 = 0,15$ et $p_2 = p_4 = 0,2$.

- Calculer p_3
 - Calculer la probabilité que la demande de l'article A soit inférieure à 4.
- Pour des raisons d'espace, on ne peut entreposer plus de 4 articles A dans le magasin. Calculer la probabilité qu'un jour choisi au hasard il y ait rupture de stock

3.2 Probabilités avec dénombrement

Rappel : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ et $p! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p$.

- Il y a C_n^p façons de choisir p éléments parmi n .
- Si un procédé nécessite deux étapes avec n_1 choix possibles à la première étape et n_2 choix possibles à la seconde, il y a $n_1.n_2$ choix possibles pour le procédé.
C'est le principe multiplicatif.

Exercice 6 (résolu) On tire au hasard et simultanément 5 cartes parmi un jeu de 52.

Calculer la probabilité d'obtenir un full au roi par les valets (trois rois et deux valets).

Solution. Nous sommes en situation d'équiprobabilité car le tirage est aléatoire.

Nombre de cas possibles : C_{52}^5 (il y a C_{52}^5 façons de choisir 5 cartes parmi 52).

Nombre de cas favorables :

On procède en deux étapes :

- On choisit trois rois : Il y a C_4^3 façons de le faire.

2. On choisit deux valets : Il y a C_4^2 façons de le faire.

Il y a donc en tout $C_4^3 \times C_4^2$ façons d'obtenir un brelan de rois par les valets d'après le principe multiplicatif.

La probabilité cherchée est donc : $p = \frac{C_4^3 \times C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{4 \times 6}{2598960} = \frac{1}{108290} \simeq 10^{-5}$

Exercice 7 On tire au hasard et simultanément cinq cartes parmi un jeu de 52. Calculer la probabilité d'obtenir :

- | | |
|----------------------------------|-------------------|
| 1. un carré de dames | 4. une couleur |
| 2. un carré de dames et un valet | |
| 3. une quinte au roi | 5. au moins un as |

3.3 Probabilités conditionnelles

Exercice 8 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,4$. Calculer $P(A/B)$ et $P(B/A)$.

Exercice 9 Soient A et B deux événements tels que $P(A/B) = \frac{1}{2}$; $P(B/A) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cup B) = 0,2$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

Exercice 10 Un dé est jeté 2 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat pair suivi d'un résultat impair.

Exercice 11 On tire au hasard et successivement deux cartes parmi un jeu de 52. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rois dans chacun des cas suivants :

1. La première carte tirée est remise dans le jeu
2. La première carte tirée n'est pas remise dans le jeu.

Exercice 12 On tire au hasard une carte parmi un jeu de 52. Soient les événements :

- A : "On obtient un as"
- B : "On obtient un coeur ou un pique"
- C : "on obtient un Honneur (10, valet, dame, roi ou as)".

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Même question avec les événements A et C .

Exercice 13 Deux machines A et B fabriquent des disques dentés. La production journalière de la machine A est de 250 disques et celle de la machine B est de 500 disques. La probabilité qu'un disque ait un défaut de dentelure est 0,02 sachant qu'il est produit par la machine A et 0,035 sachant qu'il est produit par la machine B .

1. Quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un disque pris au hasard dans la production totale d'un jour n'ait pas de défaut de dentelure ?
2. Sur la production totale d'un jour, on prélève un disque. On constate que ce disque a un défaut de dentelure. Quelle est alors, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il ait été produit par la machine A ? par la machine B ?

Exercice 14 Une entreprise est spécialisée dans la vente de câbles métalliques. Ces câbles proviennent de deux fournisseurs A et B , dans les proportions respectives de 60% et 40%, qui livrent l'un et l'autre deux catégories de produits désignés par C_1 et C_2 . Dans les livraisons de A figurent 50% de câbles C_1 et 50% de câbles C_2 ; dans celles de B figurent 20% de câbles C_1 et 80% de câbles C_2 . Sans distinction de provenances et de catégories, ces câbles sont présentés à la vente. Un câble est pris au hasard dans le stock de vente.

1. Calculer la probabilité que ce câble provienne du fournisseur A et qu'il soit de catégorie C_1 .
2. Calculer la probabilité que ce câble provienne du fournisseur B et qu'il soit de catégorie C_1 .

3. En déduire la probabilité qu'un câble pris au hasard dans le stock de vente soit de la catégorie C_1 .
4. Un câble est pris au hasard et on constate que c'est un câble C_1 . Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur B ?

Exercice 15 Une entreprise s'approvisionne chez deux fournisseurs A et B .

60% des livraisons proviennent de chez A , le reste provient de chez B .

97% des livraisons effectuées par A satisfont aux normes de qualité exigées par l'entreprise alors que 1% des livraisons effectuées par B ne sont pas conformes aux mêmes normes de qualité.

1. Quelle est la probabilité qu'une livraison choisie au hasard ne soit pas conforme aux normes de qualité de l'entreprise ?
2. Une livraison vient d'être déclarée non conforme aux normes de qualité exigées. Quelle est la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A ?

Exercice 16 Un installateur de revêtements reçoit un lot de plaques isolantes. Désirant vérifier leur épaisseur et leur conductivité thermique, il fait subir aux plaques du lot un test A relatif à l'épaisseur et un test B relatif à la conductivité thermique. Il constate qu'au test A , 3% des plaques se révèlent trop minces et qu'au test B , 4% des plaques sont trop conductibles. On note E_1 l'événement consistant, pour une plaque donnée, en la réussite du premier test A et E_2 l'événement consistant, pour une plaque donnée, en la réussite du deuxième test B . Une plaque du lot est acceptée si elle satisfait à la fois aux deux tests. On suppose que les événements E_1 et E_2 sont indépendants.

1. Calculer, pour une plaque donnée, la probabilité qu'elle soit acceptée. En déduire la probabilité p qu'elle soit refusée.
2. Par un calcul direct, retrouver la valeur de cette probabilité p .

Exercice 17 2% des pièces fabriquées dans un atelier étant défectueuses, on décide de les contrôler. Le procédé de contrôle est tel que 95% des pièces sans défaut sont acceptées et 99% des pièces défectueuses sont refusées.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée au contrôle.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit sans défaut et refusée au contrôle.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
4. Une pièce a été refusée au contrôle. Calculer la probabilité que cette pièce soit sans défaut.

3.4 Quelques solutions

Solution 1 Le tirage est effectué au hasard. Il y a donc équiprobabilité

1. (a) Il y a alors 4 cas favorables et 52 cas possibles. D'où $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- (b) Il y a 1 cas favorable et 52 possibles. D'où $p = \frac{1}{52}$
- (c) Soit A : "on a l'as de coeur" et B : "on a la dame de pique".
On veut calculer $P(A \cup B)$. Ici A et B sont incompatibles car en tirant une carte, on ne peut obtenir à la fois l'as de coeur et la dame de pique. On a donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Or $P(A) = \frac{1}{52}$ et $P(B) = \frac{1}{52}$; D'où la probabilité cherchée : $p = \frac{1}{26}$
- (d) $p = \frac{1}{4}$
- (e) Cet événement est l'événement contraire de l'événement de (d). On a donc $p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- (f) Soit A : "avoir un trèfle" et B : "avoir un as". On veut calculer $P(A \cup B)$. Ici A et B ne sont pas disjoints car on peut à la fois tirer un trèfle et un as (l'as de trèfle).
Il faut donc utiliser la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
On a $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{13}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ D'où $p = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

- (g) Cet événement est l'événement contraire de l'événement "avoir un 3 ou avoir un pique".
 Or la probabilité de ce dernier événement est $\frac{4}{13}$. D'où $p = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$

Solution 2 Ici aussi il y a équiprobabilité

- Il y a en tout C_{52}^5 façons de choisir 5 cartes parmi 52.
 Pour choisir une main comportant un carré de dames, on peut procéder en 2 étapes :
 (1) Choisir 4 dames ; (2) Choisir une 5^{ème} carte parmi les cartes restantes.
 Il y a C_4^4 façons de choisir 4 dames parmi 4 et C_{48}^1 façons de choisir la 5^{ème} carte parmi les 48 restantes. Il y a donc $C_4^4 \times C_{48}^1$ façons d'avoir un carré de dames en tirant 5 cartes.
 Or $C_4^4 = 1$; $C_{48}^1 = 48$ et $C_{52}^5 = 2598960$. Donc $p = \frac{48}{2598960} \simeq 2.10^{-5}$.
- Il y a C_4^4 façons de choisir 4 dames parmi 4 et C_4^1 façons de choisir 1 valet parmi 4. Il y a donc $C_4^4 \times C_4^1$ façons d'avoir un carré de dames et un valet. Nous avons donc $1 \times 4 = 4$ mains favorables.
 La probabilité cherchée est donc : $p = \frac{4}{2598960} \simeq 1,5.10^{-6}$
- Pour choisir une main comportant un brelan de roi et une paire de 10, on peut procéder en 2 étapes :
 1) Choisir 3 rois parmi les 4 du jeu ; 2) Choisir deux 10 parmi les 4 du jeu.
 Il y a C_4^3 façons de choisir 3 rois parmi 4 et C_4^2 façons de choisir deux 10 parmi 4. Il y a donc en tout $C_4^3 \times C_4^2 = 4 \times 6 = 24$ mains favorables.
 La probabilité cherchée est donc : $p = \frac{24}{2598960} = \frac{1}{108290} \simeq 10^{-5}$.
- Pour composer une main comportant une quinte au roi, il faut un roi (C_4^1 choix possibles) ; une dame (C_4^1 choix possibles) ; un valet (C_4^1 choix possibles) ; un 10 (C_4^1 choix possibles) et un 9 (C_4^1 choix possibles).
 Il y a donc en tout $C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1 = 4^5$ mains favorables.
 La probabilité cherchée est donc : $p = \frac{1024}{2598960} = \frac{64}{162435} \simeq 4.10^{-4}$
- Soit T : "On a 5 cartes à trèfle" ; K : "On a 5 cartes à carreau" ; C : "On a 5 cartes à coeur" et P : "on a 5 cartes à pique". La probabilité cherchée est donc $p = P(T \cup K \cup C \cup P) = P(T) + P(K) + P(C) + P(P)$ car ces événements sont incompatibles.
 Calculons par exemple $P(T)$. Il y a C_{13}^5 façons de choisir 5 cartes à trèfle parmi 13. Donc $P(T) = \frac{1287}{2598960} = \frac{33}{66640}$ car $C_{13}^5 = 1287$
 De même, $P(K) = P(C) = P(P) = P(T)$.
 Finalement : $p = \frac{33}{16660} \simeq 2.10^{-3}$
- L'événement "avoir au moins un as" est assez complexe. Il est en effet la réunion de 4 événements (incompatibles toutefois!) à savoir : "avoir un as exactement" ; "avoir 2 as exactement" ; "avoir 3 as exactement" et "avoir 4 as exactement". On pourrait donc calculer la probabilité demandée en additionnant les probabilités des 4 événements précités. Il y a cependant plus simple. Au lieu de calculer la probabilité d'avoir au moins un as, on peut calculer la probabilité de l'événement contraire qui est : "ne pas avoir d'as".
 Or cette probabilité vaut $\frac{1712304}{2598960}$ car il y a C_{48}^5 façons de choisir 5 cartes parmi les 48 qui ne comportent pas d'as. Finalement la probabilité cherchée est $p = 1 - \frac{1712304}{2598960} \simeq 0,34$.

Solution 3 Soit A : "le résultat du premier lancer est pair" et soit B : "le résultat du deuxième lancer est impair".

On demande de calculer $P(A \cap B)$.

Le résultat du premier lancer n'influe pas sur le résultat du deuxième lancer.

A et B sont donc indépendants.

On a donc $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Or $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. La probabilité cherchée est donc $p = \frac{1}{4}$

Solution 4



1. Soit R_1 : “on a un roi au 1^{er} tirage” et soit R_2 : “on a un roi au 2^{ème} tirage”. On veut calculer $P(R_1 \cap R_2)$.

Or $P(R_1 \cap R_2) = P(R_2/R_1).P(R_1)$

De plus $P(R_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ et $P(R_2/R_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ car la 1^{ère} carte tirée est remise dans le jeu.

Finalement : $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

2. La méthode est la même que dans (a). Par contre, la 1^{ère} carte tirée étant remise dans le jeu, on a

$$P(R_2/R_1) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$$

la probabilité cherchée est donc $p = \frac{1}{13} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{221} \simeq 4,5.10^{-3}$

Solution 5

Ne surtout pas essayer de résoudre ceci à l’intuition mais essayer de voir si on a $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

1. On a $P(A) = \frac{1}{13}$ (voir TP1); $P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (Décomposer B en réunion d’événements incompatibles : “avoir un coeur” ; “avoir un pique”).

$P(A \cap B)$ est la probabilité d’avoir l’as de coeur ou l’as de pique (qui sont 2 événements incompatibles).

$$\text{Donc } P(A \cap B) = \frac{12}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{26}.$$

A et B sont donc indépendants.

2. Examinons maintenant les événements A et C .

On a $P(C) = \frac{5}{13}$ (5 honneurs possibles sur 13 cartes)

De plus $A \subset C$, donc $A \cap C = A$ et $P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{13}$

A et C ne sont donc pas indépendants.