Exercice 1

L'univers Ω est un jeu de 32 cartes.

1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32. Quelle est la probabilité que ce soit un Trèfle ?

   Notes : l'équiprobabilité des tirages est assurée par l'expression "au hasard".

   Dans ce cas la formule qui s'applique est $P(A) = \dfrac{\textit{Nombre de cas favorables à } A}{\textit{Nombre de cas possibles}}$

   Il ya 8 Trèfles dans un jeu de 32. Donc P("Tirer un Trèfle") $= \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

2. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32. C'est un Trèfle. Quelle est la probabilité que ce soit un Roi ?

   On SAIT que c'est un Trèfle :

   Soit on ne considère plus QUE les Trèfles, à l'exclusion des autres couleurs

   Soit on s'oriente vers des probabilités conditionnelles (Probabilité de ... SACHANT QUE ...)

   (a) Répondre en restreignant l'univers.

   On travaille dans l'univers restreint Ω' qui est l'ensemble des huit cartes à Trèfle.

   Un seul cas favorable : le Roi. Donc $P_T(R) = \dfrac{1}{8}$

   (b) Répondre en utilisant l'univers Ω et la formule des probabilités conditionnelles.

   $P_T(R) = \dfrac{P(T \cap R)}{P(T)}$.

   Or, $T \cap R$ est l'événement "Trèfle ET Roi", soit, en français : "Tirer un Trèfle qui soit le Roi".

   Un seul cas favorable : le Roi de Trèfle. Donc $P(T \cap R) = \dfrac{1}{32}$

   Ainsi : $P_T(R) = \dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{8}$.

Exercice 2

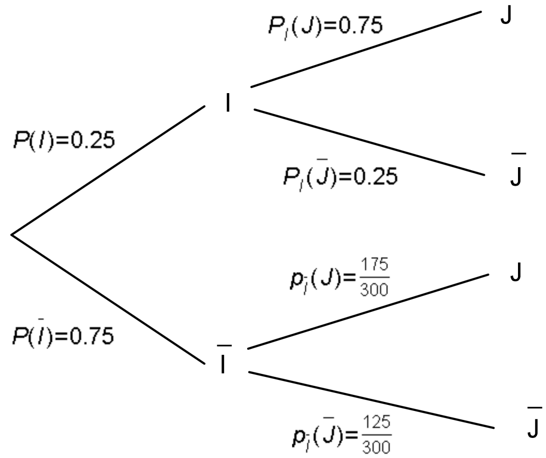
Un sondage est effectué pour une étude de marché sur un nouveau produit.

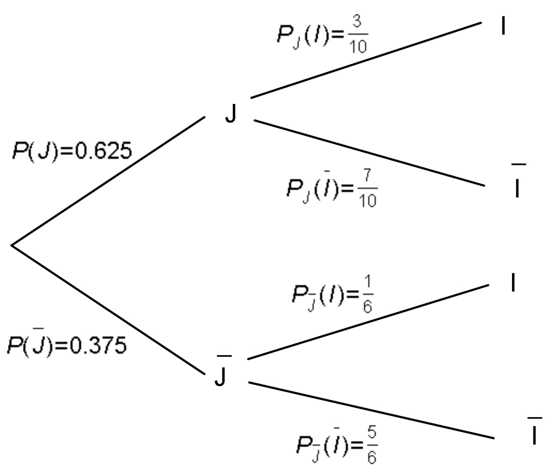
Les résultats de l'enquête sur un échantillon de 400 personnes sont les suivants :

	Moins de 30 ans	Plus de 30 ans
Interessé par le produit	75	25
Non interessé	175	125

On choisit au hasard une personne de l'échantillon.
I est l'évènement : "la personne choisie est interessée par le produit".
J est l'évènement : "la personne choisie a moins de 30 ans".

1. Nommer et calculer les douze probabilités devant figurer sur les branches des deux arbres suivants :





2. Calculer les probabilités $P(I \cap J)$, $P(I \cap \overline{J})$, $P(\overline{I} \cap J)$ et $P(\overline{I} \cap \overline{J})$:
   (a) à partir de l'arbre 1

$$P(I \cap J) = P(I) \times P_I(J) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$
$$P(I \cap \overline{J}) = P(I) \times P_I(\overline{J}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$
$$P(\overline{I} \cap J) = P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(J) = \frac{3}{4} \times \frac{175}{400} = \frac{7}{16}$$

$P(\overline{I} \cap \overline{J}) = P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(\overline{J}) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{125}{400} = \dfrac{5}{16}$

(b) à partir de l'arbre 2

$P(I \cap J) = P(J \cap I) = P(J) \times P_J(I) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{16}$

$P(I \cap \overline{J}) = P(\overline{J} \cap I) = P(\overline{J}) \times P_{\overline{J}}(I) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{16}$

$P(\overline{I} \cap J) = P(J \cap \overline{I}) = P(J) \times P_J(\overline{I}) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{7}{16}$

$P(\overline{I} \cap \overline{J}) = P(\overline{J} \cap \overline{I}) = P(\overline{J}) \times P_{\overline{J}}(\overline{I}) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{16}$

(c) à partir du tableau initial.

$P(I \cap J) = \dfrac{75}{400} = \dfrac{3}{16}$

$P(I \cap \overline{J}) = \dfrac{25}{400} = \dfrac{1}{6}$

$P(\overline{I} \cap J) = \dfrac{175}{400} = \dfrac{7}{16}$

$P(\overline{I} \cap \overline{J}) = \dfrac{125}{400} = \dfrac{5}{16}$

Vérifier la concordance des résultats.

Les probabilités sont identiques dans les 3 cas. La somme des 4 probabilités vaut bien 1.

Exercice 3

Un sac contient trois jetons rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jetons jaunes numérotés 1 et 2 et un jeton bleu numéroté 1.

On extrait au hasard un jeton du sac.

Soit les évènements :
R : "le jeton est rouge"
U : "le numéro est 1"
D : "le numéro est 2".

Les évènements R et U sont-ils indépendants ? et les évènements R et D ?

Rappelons que A et B sont indépendants signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(R) = \dfrac{3}{6}$ et $P(U) = \dfrac{3}{6}$ donne $P(R) \times P(U) = \dfrac{1}{4}$

R est l'évènement "'tirer la boule rouge marquée 1"' alors $P(R \cap U) = \dfrac{1}{6}$

R et U ne sont donc pas indépendants.

$P(D) = \dfrac{2}{6}$ donne $P(R) \times P(D) = \dfrac{1}{6}$

$R \cap D$ est l'évènement "'tirer la boule rouge marquée 2"' donc $P(R \cap D) = \dfrac{1}{6}$.

Ainsi R et D sont indépendants.

Exercice 4

Benoit a placé dans un sac sept cartons portant chacun une des lettres "B", "E", "I", "N", "O", "S", "T".

Il tire au hasard un carton, note la lettre obtenue,et remet le carton dans le sac. Il répète six fois ce tirage.

Benoit a-t-il plus de chances d'écrire son prénom ou le nom de "BETSEN" ?

L'expérience consiste à répéter six foisl'épreuve "'tirer un carton du sac"', en se replaçant à chaque fois dans les mêmes conditions (tirage avec remise). Le tirage d'un carton s'effectuant au hasard,, la loi de probabilité p sur l'ensemble des sept lettres est équirépartie. Ainsi, la probabilité de tirer une de ces lettres est $\frac{1}{7}$.

Les six épreuves étant successives et indépendantes, la situation se modélise en en adoptant la "'loi produit"' P sur l'ensemble des listes possibles de six lettres.

$P(\{B, E, T, S, E, N\}) = p(\{B\})p(\{\{E\})\mathrm{p}(\{\mathrm{T}\})\mathrm{p}(\{\mathrm{S}\})\mathrm{p}(\{\mathrm{E}\})\mathrm{p}(\{\mathrm{N}\}) = \left(\frac{1}{7}\right)^6$

$P(\{B, E, N, O, I, T\}) = p(\{B\})p(\{\{E\})p(\{N\})p(\{O\})p(\{I\})p(\{T\}) = \left(\frac{1}{7}\right)^6$

Les deux probabilités sont égales.

Question subsidiaire : étudier la même question, mais sans remise des cartons dans le sac

Cette fois-ci, les épreuves successives ne sont plus indépendantes puisque le tirage d'une lettre dépend des tirages précédents.

On aura $P(\{B, E, T, S, E, N\}) = 0$, évènement impossible puisque si le "'E"' a été tiré, il ne pourra pas l'être une seconde fois.

$P(\{B, E, N, O, I, T\}) = \frac{1}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\,520}$