Feuille de révisions des vacances d'avril et du CC4

Pour réviser les suites et Python

Exercice 1

Le prix d'un forage est estimé par une entreprise de la façon suivante :
Le creusement du premier mètre est facturé 100 € ;
A partir du deuxième mètre, le creusement est facturé 11 € de plus que celui du mètre précédent.

1. Si p_n est le prix facturé pour le creusement du $n^{\text{ième}}$ mètre,
a) Justifier que (p_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
b) Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.
c) Donner le prix facturé pour le quinzième mètre.

2. a) Calculer $S_{15} = p_1 + p_2 + \ldots + p_{15}$;
b) Que représente S_{15} pour l'entreprise ?

3. a) Un forage a été facturé 12 051 €. Déterminer par le calcul quelle a été la profondeur du forage.
b) Ecrire un programme Python qui permet de retrouver ce résultat.

Exercice 2

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos.

La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.

Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables, car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.

Le 1er janvier 2023, la ville dispose de 200 vélos à louer.

On considère la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le nombre de vélos utilisables le 1er janvier $2023 + n$. On a alors $u_0 = 200$.

1.
   a. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 30$.
   b. Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1er janvier 2024 ?
2. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 150$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.
   b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 50 \times 0{,}8^n + 150$.
   d. Montrer que la suite (u_n) est une suite décroissante.
   e. En se servant de la calculatrice, dire si la suite (u_n) semble convergente et si oui, conjecturer sa limite.
3. On donne le programme en Python suivant :

```
U=200
N=0
while U>=160 :
    U=0.8*U+30
    N=N+1
print (« Le service de location s'arrêtera le 1er janvier », 2023+N)
```

   a. Pourquoi est-on sûr que ce programme va s'arrêter ?
   b. La municipalité a décidé d'arrêter ce service de location si son nombre de vélos n'est plus assez élevé. Quel est le nombre minimal de vélos qu'elle veut avoir pour pouvoir continuer ?
   c. Faire fonctionner cet algorithme et remplir le tableau suivant en indiquant à chaque étape les valeurs prises par chacune des variables. (On remplira autant de colonnes que nécessaire et on arrondira chaque valeur à l'entier le plus proche).

U	200										
N	0										

   d. Que renvoie le programme ?

Pour réviser les probabilités conditionnelles et les suites

Exercice 3

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B

Dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie de la façon suivante :

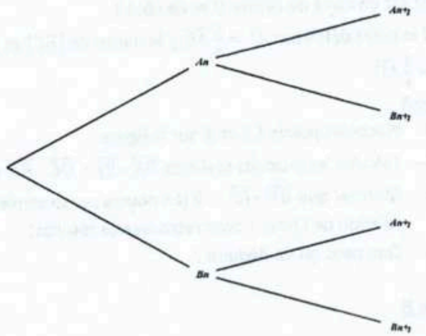
- Si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8
- Si le joueur achève une partie de type B la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7

Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n et B_n les événements :

A_n : "la n-ième partie est une partie de type A"

B_n : "la n-ième partie est une partie de type B"

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n *la probabilité de l'événement* A_n



1. Compléter l'arbre de probabilités ci-contre :
2. Montrer, à l'aide de la loi des probabilités totales, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
3. $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$
4. On considère que le joueur a une chance sur deux que sa première partie soit de type A. On considère donc la suite définie par récurrence : $a_1 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$
   On admettra que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq a_n \leq 0{,}6$. A l'aide de ce résultat montrer que la suite (a_n) est croissante.
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = a_n - 0{,}6$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
6. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n
7. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
8. Conjecturer la limite de la suite (a_n) puis interpréter dans le contexte de l'exercice.

Pour réviser la dérivation et la fonction exponentielle

Exercice 4

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 3]$ par : $g(x)=(10-6x)e^{-x+2}+2$.
   a. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x\in[0,5\ ;\ 3]$ et montrer que $g'(x)$ est du signe de $3x-8$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   c. Calculer $g(2)$.
   d. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 3]$.
2. Chaque mois, une entreprise peut extraire entre 500 et 3000 tonnes de minerai.

Lorsqu'elle extrait x milliers de tonnes de minerai, le bénéfice réalisé, en centaine de milliers d'euros, est $f(x)$, où f est la fonction définie sur $[0,5\ ;\ 3]$ par : $f(x)=(6x-4)e^{-x+2}+2x$.

   a. Montrer que pour tout $x\in[0,5\ ;\ 3]$, $f'(x)=g(x)$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0,5\ ;\ 3]$.
   c. En déduire la quantité de minerai à extraire pour obtenir un bénéfice maximal.

Exercice 5

Une pompe est utilisée pour permettre la circulation d'un fluide dans un circuit.

Son débit varie en fonction de la température t.

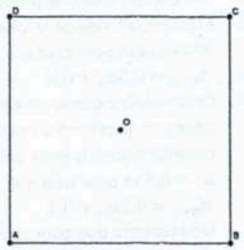
La fonction qui, à la température en degrés Celsius, fait correspondre le débit de la pompe, en litres par seconde, est définie pour t compris entre -5°C et 5°C par $d(t)=1+\frac{3t+4}{1+t^2}$.

1. Montrer que d est dérivable sur $[-5\ ;\ 5]$ et que pour tout $t\in[-5\ ;5]$, $d'(t)=\frac{-3t^2-8t+3}{(1+t^2)^2}$
2. En déduire le tableau de variation de d sur $[-5\ ;5]$
3. Quel est le débit maximal de la pompe et la température correspondante ?

Pour réviser les produits scalaires

Exercice 6

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 1.
Soit I le point défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, J le milieu de $[BC]$ et K le point défini par $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.



Partie A

1- Placer les points I, J et K sur la figure.
2- Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AD}$
3- Montrer que $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IC}=0$ (on pourra par exemple se servir de la relation de Chasles pour retrouver ce résultat)
4- Que peut-on en déduire ?

Partie B

On considère le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O, I, J et K dans ce repère.
2. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{IC}$
3. Retrouver le résultat de la question 3 partie A à l'aide de ces coordonnées.