

Exercice #1: $(1+x^2)y' + 2xy = e^x$

$$\Rightarrow y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{e^x}{1+x^2} \quad (E)$$

(E) est de la forme $y' + \alpha y = \beta$ avec $\alpha(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $\beta(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ deux fois continues sur $\mathbb{R}$.

(E) est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

#1 Les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$y_h(x) = ce^{-A(x)}$$

$$\text{où } c \in \mathbb{R} \text{ et } A(x) = \int \alpha(x) dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\ = \ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow y_h(x) = ce^{-\ln(1+x^2)} = \frac{c}{1+x^2}$$

#2 D'après la MVC, on suppose

$$y_p(x) = \frac{c(x)}{1+x^2}$$

$$\text{où } c(x) = \int \beta(x) e^{A(x)} dx = \int e^x dx = e^x$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

(2)

#3) Les solutions de (E) s'écrivent sur $\mathbb{R}$ comme

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C + e^x}{1+x^2}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice #2 ① Le polynôme caractéristique (PC) associé à (E) est

$$r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$$

les racines du (PC) sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$.

les solutions de l'équa. homogène s'écrivent

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ où } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = e^t = P(t) e^{rt} \text{ où } P(t) = 1 \text{ et } r = 1.$$

$r=1$ n'est pas racine du (PC)

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p(t) &= Q(t) e^{rt} \text{ où } \deg Q = \deg P = 0 \\ &= A e^t \end{aligned} \quad \Rightarrow Q(t) = A$$

On veut $y_p'' + 3y_p' + 2y_p = e^t$

$$\Leftrightarrow 6A e^t = e^t \Leftrightarrow A = 1/6.$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{6} e^t$$

③

Les solutions de (E) décrivent

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6} e^t$$

② $f(t) = e^{-t} = P(t)e^{rt}$ où $P(t) = 1$ et $r = -1$
 $r = -1$ est une racine simple de (PC)

$$\Rightarrow y_p(t) = tQ(t)e^{rt} \text{ où } \deg Q = \deg P = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = A$$

$$= Ate^{-t}$$

On a $y_p'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$

$$y_p''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$$

On veut $y_p'' + 3y_p' + 2y_p = e^{-t}$

$$\Rightarrow -2Ae^{-t} + \cancel{Ate^{-t}} + 3Ae^{-t} - 3\cancel{Ate^{-t}} + 2\cancel{Ate^{-t}} = e^{-t}$$

$$\Rightarrow Ae^{-t} = e^{-t} \Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow y_p(t) = te^{-t}$$

Les solutions de (E) décrivent

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + te^{-t}$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

③ $f_1(t) = e^t \Rightarrow y_{p1}(t) = \frac{1}{6} e^t$

$f_2(t) = e^{-t} \Rightarrow y_{p2}(t) = te^{-t}$

$$f(t) = \frac{f_1(t) + f_2(t)}{2}$$

(4)

D'après le principe de superposition,

$$y_p(t) = \frac{y_{p1}(t) + y_{p2}(t)}{2} = \frac{1}{12} e^t + \frac{1}{2} t e^{-t}$$

est une solution particulière de (E). Les solutions de (E) s'écrivent

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^t + \frac{1}{2} t e^{-t} \quad \text{si } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Exercice #3: Effectuer le DL(0,4) de $2\ln(\cos x) + \sin^2 x$

On a

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \mathcal{O}(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$X = \cos x - 1 \rightarrow 0 \quad \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

$$\ln(\cos x) = \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \mathcal{O}(X^4)$$

$$\begin{aligned} \text{où } X = \cos x - 1 &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^4) - 1 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^4) \end{aligned}$$

⑤

$$\Rightarrow \ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\Rightarrow 2\ln(\cos x) + \sin^2 x = -x^2 - \frac{x^4}{6} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$= -\frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^4) \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\ln(\cos x) + \sin^2 x}{x^4} \underset{0}{\sim} \left(\frac{-x^4}{x^4} \right) = -\frac{1}{2}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln(\cos x) + \sin^2 x}{x^4} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 4

① Posons $h = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \frac{e^{1/n} - e^{-1/n}}{\sin(1/n)} = \frac{e^h - e^{-h}}{\sin(h)}$$

$\sin(h) = h + \mathcal{O}(h) = C_p h^p + \mathcal{O}(h^p)$ avec $p=1$ et $C_p = 1 \neq 0$.

Effectuons de DL(0, 2+p) = DL(0, 3) de

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \mathcal{O}(h^3)$$

⑥

$$\Rightarrow \frac{e^h - e^{-h}}{\sin(h)} = \frac{2h + h^3/3 + O(h^3)}{h - h^3/6 + O(h^3)}$$

$$= \frac{2 + h^2/3 + O(h^2)}{1 - h^2/6 + O(h^2)}$$

$$\frac{2 + h^2/3}{(2 - h^2/3)} \quad \bigg| \quad \frac{1 - h^2/6}{2 + 2h^2/3}$$

$$= \frac{2h^2/3}{(2h^2/3 + 2(h^2))}$$

$$= 2(h^2)$$

$$\Rightarrow f = \mathcal{L} + \frac{\mathcal{L}h^2}{3n^2} + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{L} + \frac{\mathcal{L}}{3n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

② On en déduit que l'équation de l'asymptote en $+\infty$ à C_f est $y = 2$

$$\Rightarrow f(x) = y + \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) - y \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3x^2} > 0.$$

On en déduit que C_f est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.