Sujets de bac : Suites

Sujet n°1 : Antilles – Guyane – juin 2006

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O;\vec{u})$ donné en annexe, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n;2)$ et $(B_n;1)$ et le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n;1)$ et $(B_n;3)$.

1) Sur le graphique, placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2.
2) On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives de points A_n et B_n. Montrer que $a_{n+1} = \frac{2a_n+b_n}{3}$.

On admet de même que $b_{n+1} = \frac{a_n+3b_n}{4}$.

Partie B

1) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.
    a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
    b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
    c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
2)
    a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).
    b. Etudier les variations de la suite (b_n).
3) Que peut-on en déduire quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3a_n + 4b_n$.

Montrer que la suite (v_n) est constante.

2) Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

Sujet n°2 : Asie – juin 2007

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. L'unité graphique est $4\ cm$.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + i \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1) Calcul de z_n en fonction de n et λ.
    a. Vérifier les égalités : $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda+1)i$; $z_3 = (\lambda^2+\lambda+1)i$
    b. Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul, $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i$
2) Etude du cas $\lambda = i$.
    a. Montrer que $z_4 = 0$.
    b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.
    c. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
    d. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.
3) Caractérisation de certaines suites (z_n).
    a. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, montrer que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors $\lambda^k = 1$.

Sujet n°3 : Centres étrangers – juin 2005

1ère partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1) Etudier les variations de f et g sur $[0;+\infty[$.
2) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2ème partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

3) On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

A l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$$

4) Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire les limites de S_n et T_n en $+\infty$.
5) Etude de la convergence de la suite (u_n).
   a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit l sa limite.
   c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$

pour tout entier naturel n, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} w_n$.

Montrer alors que $\frac{5}{6} \leq \ln(l) \leq 1$ et en déduire un encadrement de l.

__Sujet n°4 : France – septembre 2007__

1) La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.
   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en annexe la droite d'équation

$y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2;0)$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

   b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $l = \frac{23}{18}$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq \frac{23}{18}$.
   d. Etudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.
2)
   a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

   b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1{,}2$; $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le a, démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3) La suite u et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

__Sujet n°5 : France – septembre 2010__

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{4v_n - 1}{v_n + 2}$.

On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ et alors on a $v_{n+1} = f(v_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1)

a. Sur l'axe des abscisses, placer v_0 puis construire v_1, v_2 et v_3 en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variations et sur la convergence de la suite (v_n) ?

2)

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $v_n - 1 > 0$.

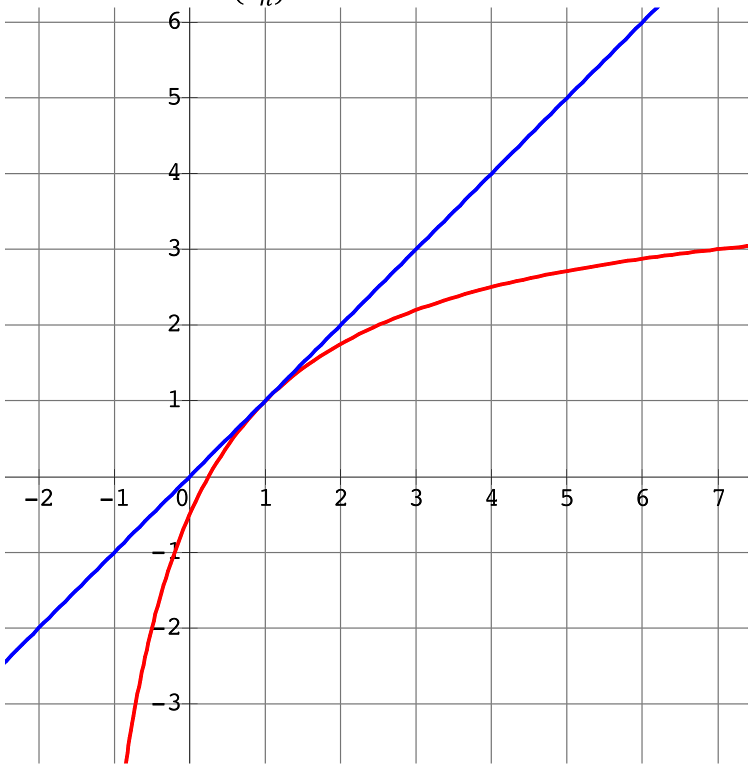
b. Valider par une démonstration les conjectures de la question 1b.

3) Pour tout entier naturel n, on ose $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique donc vous préciserez la raison et le premier terme.

b. Exprimer u_n puis v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire la limite de la suite (v_n).



Sujet n°6 : Nouvelle Calédonie – novembre 2004

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 ; v_1 ; u_2 et v_2.

2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel $n$par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3) Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).