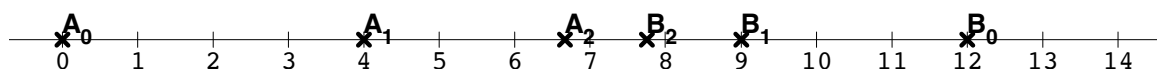


Correction sujets de bac : Suites

Sujet n°1 : Antilles-Guyane – juin 2006

Partie A

1)



2) Par définition de A_{n+1} , nous avons $\overrightarrow{OA_{n+1}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_n} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB_n}$ et en passant aux abscisses :

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n = \boxed{\frac{2a_n + b_n}{3}}$$

Partie B

1)

a. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12} = \frac{5b_n - 5a_n}{12} = \frac{5}{12}(b_n - a_n) = \frac{5}{12}u_n$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 12$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n = \boxed{12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n}$

c. La raison de (u_n) est strictement comprise entre -1 et 1 donc elle converge vers 0 .

2)

a. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{u_n}{3} \text{ or } u_n > 0 \text{ car c'est une suite géométrique de raison et de premier terme positif. Donc } \boxed{(a_n) \text{ est croissante.}}$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n = \frac{a_n - b_n}{4} = -\frac{u_n}{4} < 0$$

Donc la suite $\boxed{(b_n) \text{ est décroissante.}}$

3) (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et la différence $b_n - a_n$ a pour limite 0 donc les suites $\boxed{(a_n)}$ et $\boxed{(b_n)}$ sont adjacentes. On peut en déduire qu'elles convergent et qu'elles ont la même limite.

Partie C

1) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 2a_n + b_n + a_n + 3b_n = 3a_n + 4b_n = v_n$$

Donc la suite $\boxed{(v_n) \text{ est constante}}$ et toujours égale à $v_0 = 3a_0 + 4b_0 = 48$.

2) On note L la limite commune de (a_n) et (b_n) . Alors la suite (v_n) converge vers $7L$. Par unicité de la limite, nous avons $7L = 48$ d'où $\boxed{L = \frac{48}{7}}$

Sujet n°2 : Asie – juin 2007

1)

a. $z_1 = \lambda z_0 + i = \boxed{i}$

$$z_2 = \lambda z_1 + i = \lambda i + i = \boxed{(\lambda + 1)i}$$

$$z_3 = \lambda z_2 + i = \lambda(\lambda + 1)i + i = \boxed{(\lambda^2 + \lambda + 1)i}$$

b. Par récurrence sur n , on va montrer que $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i$.

Initialisation : on veut montrer que la propriété est vraie au rang 0 , c'est-à-dire que $z_0 = \frac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1} \times i$.

Or $\lambda^0 - 1 = 0$ donc on a bien l'égalité.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un rang n , c'est-à-dire que $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i$.

On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$ c'est-à-dire que $z_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} \times i$. Or :

$$z_{n+1} = \lambda z_n + i = \frac{\lambda(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1} \times i + i = \left(\frac{\lambda^{n+1} - \lambda}{\lambda - 1} + 1 \right) \times i = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1}{\lambda - 1} \times i = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} \times i$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n , c'est-à-dire : $\boxed{z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i}$.

2) Dans cette question $\lambda = i$.

a. $z_4 = \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} \times i$ d'après la question précédente et $\lambda^4 = i^4 = 1$ donc $\boxed{z_4 = 0}$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+4} = \frac{\lambda^{n+4} - 1}{\lambda - 1} \times i = \frac{\lambda^n \times \lambda^4 - 1}{\lambda - 1} \times i = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i = \boxed{z_n} \text{ car } \lambda^4 = 1$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \lambda z_n + i \Leftrightarrow z_{n+1} = i z_n + i$$

M_{n+1} est l'image de M_n par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\theta \Leftrightarrow z_{n+1} - \omega = e^{i\theta}(z_n - \omega)$

Par identification, on doit donc avoir : $e^{i\theta} = i$ et $\omega - e^{i\theta}\omega = i$

On en déduit $\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\omega = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}$.

M_{n+1} est l'image de M_n par la rotation de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3)

a. On suppose que $\lambda^k = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

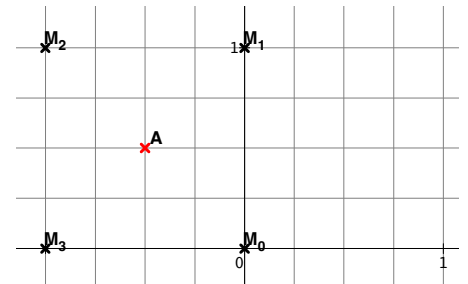
$$z_{n+k} = \frac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \times i = \frac{\lambda^n \times \lambda^k - 1}{\lambda - 1} \times i = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i = \boxed{z_n}$$

b. On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+k} = z_n$.

$$z_{n+k} = z_n \Leftrightarrow \frac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \times i = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i \Leftrightarrow \lambda^{n+k} - 1 = \lambda^n - 1 \text{ car } \lambda \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n(\lambda^k - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^n = 0 \text{ ou } \lambda^k = 1$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie en particulier pour $n = 1$ et alors la première possibilité $\lambda = 0$ est fautive. Finalement, $\boxed{\lambda^k = 1}$.



Sujet n°3 : Centres étrangers – juin 2005

1^{ère} partie

1) f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $[0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

Le dénominateur est clairement positif sur $[0; +\infty[$ alors que le numérateur est clairement négatif. Donc $f'(x)$ est négatif pour tout $x \in [0; +\infty[$ et f est décroissante.

g la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $[0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

Le dénominateur et le numérateur sont clairement positif sur $[0; +\infty[$ donc $g'(x)$ est positif et g est croissante.

2) $f(0) = 0$ et f est décroissante sur $[0; +\infty[$ donc f est négative sur $[0; +\infty[$.

$g(0) = 0$ et g est croissante sur $[0; +\infty[$ donc g est positive sur $[0; +\infty[$.

Ceci signifie que, pour tout $x \geq 0$,

$$\ln(1+x) - x \leq 0 \text{ et } \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \text{ ou encore } \boxed{x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$$

2^{ème} partie

1) Montrons par récurrence sur $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Initialisation : montrons que la propriété est vraie au rang 1, autrement dit que $u_1 > 0$.

Or $u_1 = \frac{3}{2}$ donc la propriété est vérifiée au rang 1.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 1$, autrement dit $u_n > 0$.

Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq 1$.

Or $u_n > 0$ et $1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1$ donc, en multipliant membre à membre les deux inégalités (ce qui est autorisé car tout est positif), on obtient : $u_{n+1} > 0$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{u_n > 0}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2) Montrons par récurrence que $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ pour $n \geq 1$.

Initialisation : on veut montrer que la propriété est vraie au rang 1, c'est-à-dire que $\ln(u_1) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$.

Or $u_1 = \frac{3}{2}$ donc $\ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$.

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 1$, c'est-à-dire

$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire

$\ln(u_{n+1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ Or

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) &= \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln\left(u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \\ &= \ln(u_{n+1}) \end{aligned}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

3) En appliquant la 1^{ère} partie pour $x = \frac{1}{2}$ puis pour $x = \frac{1}{2^2}$, ... et enfin pour $x = \frac{1}{2^n}$, on trouve :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$$

...

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

En additionnant terme à terme toutes ces inégalités, on trouve :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Ou encore :

$$\boxed{S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n}$$

4) S_n est la somme des n 1^{er} termes de la suite géométrique de 1^{er} terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times 2 = \boxed{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

T_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de 1^{er} terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

$$T_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui est strictement compris entre 0 et 1 donc la limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ en $+\infty$ est 0.

$\boxed{\text{On en déduit que } (S_n) \text{ converge vers 1 et que } (T_n) \text{ converge vers } \frac{1}{3}.}$

5) Pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n = u_n \times \frac{1}{2^{n+1}}$$

Or, d'après les questions précédentes $u_n > 0$ et comme $2^{n+1} > 0$, nous pouvons dire que $u_{n+1} - u_n$ est strictement positif donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}.}$

D'après les questions précédentes, $\ln(u_n) \leq S_n$ pour tout $n \geq 1$, or $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$ donc $\ln(u_n) \leq 1$ et comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $u_n \leq e$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par e donc elle converge.

On utilise la propriété énoncée avec $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$ et on trouve :

$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq \ln(l) \leq 1 \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\frac{5}{6} \leq \ln(l) \leq 1}$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, nous avons $\boxed{e^{\frac{5}{6}} \leq l \leq e}$

Sujet n°4 : France – septembre 2007

1)

a. Voir la courbe

b. On suppose que la suite u converge et on note l sa limite.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$, en passant à la limite, nous obtenons : $l = \frac{1}{3} \times l + \frac{23}{27}$. Or :

$$l = \frac{1}{3} \times l + \frac{23}{27} \Leftrightarrow \frac{2}{3}l = \frac{23}{27} \Leftrightarrow l = \frac{23}{27} \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow l = \frac{23}{18}$$

Donc, si u est convergente alors sa limite ne peut être que $\boxed{\frac{23}{18}}$.

c. Par récurrence sur n entier positif, nous allons montrer que $u_n \geq \frac{23}{18}$.

Initialisation : on veut montrer que la propriété est vraie pour $n = 0$, c'est-à-dire que $u_0 \geq \frac{23}{18}$.

Or $u_0 = 2$ et $2 > \frac{23}{18}$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $u_n \geq \frac{23}{18}$ et on veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq \frac{23}{18}$. Or :

$$u_n \geq \frac{23}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n \geq \frac{1}{3} \times \frac{23}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{23}{54} + \frac{23}{27} \Leftrightarrow u_{n+1} \geq \frac{23}{54} + \frac{23 \times 2}{54} \Leftrightarrow u_{n+1} \geq \frac{69}{54} \Leftrightarrow u_{n+1} \geq \frac{23}{18}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion, d'après le principe de récurrence, $\boxed{u_n \geq \frac{23}{18}}$ pour tout entier naturel n .

d. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = \frac{23}{27} - \frac{2}{3}u_n \quad \text{Or} \quad u_n \geq \frac{23}{18} \quad \text{et donc} \quad -\frac{2}{3}u_n \leq -\frac{2}{3} \times \frac{23}{18} \quad \text{ou encore} \quad -\frac{2}{3}u_n \leq -\frac{23}{27}$$

Et donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et ceci montre que la suite u est décroissante.

La suite u est donc décroissante, minorée par $\frac{23}{18}$ donc elle converge et d'après la question b, sa limite est $\frac{23}{18}$.

2)

a. On considère la suite w géométrique, de 1^{er} terme $w_0 = \frac{1}{10^2}$ et de raison $\frac{1}{10}$. Nous avons donc, pour

tout entier naturel n : $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^2} \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^{n+2}}$.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$$

Il s'agit donc de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = w_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10^2} \times \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) = \boxed{\frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right)}$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1,2 \overbrace{777 \dots 7}^{n \text{ chiffres}} = 1,2 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \dots + \frac{7}{10^{n+1}}$ donc :

$$v_n = 1,2 + 7 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} \right) = \frac{6}{5} + 7 \times \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}} \right)$$

$10 > 1$ donc la limite de 10^n en $+\infty$ est égale à $+\infty$ (c'est le terme général d'une suite géométrique de raison 10

strictement supérieur à 1 donc la suite diverge vers $+\infty$). Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{5} + \frac{7}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{6}{5} + \frac{7}{90} = \frac{6 \times 18 + 7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$$

u est une suite décroissante d'après la question 1d. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = 1,2 \underbrace{77..7}_{n+1 \text{ chiffres}} - 1,2 \underbrace{77..7}_{n \text{ chiffres}} = 1,2 + 7 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+2}} \right) - 1,2 - 7 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} \right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{7}{10^{n+2}} > 0 \text{ donc la suite } v \text{ est croissante.}$$

Comme sa limite est $\frac{23}{18}$, ceci montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \frac{23}{18}$.

Nous avons donc : u décroissante, v croissante et $u_n \geq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \frac{23}{18} - \frac{23}{18} = 0$$

Donc les suites u et v sont adjacentes.

Sujet n°5 : France – septembre 2010

1)

- Voir le graphique
- Il semble que la suite (v_n) soit décroissante et qu'elle converge vers 1.

2)

a. Initialisation : on veut montrer que la propriété est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $v_0 - 1 > 0$ or $v_0 = 5$ donc $v_0 - 1 = 4 > 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , la propriété est vraie, c'est-à-dire que $v_n - 1 > 0$.

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que $v_{n+1} - 1 > 0$. Pour cela, nous allons étudier les variations de f sur $] -2; +\infty[$.

f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2}$. Donc f' est positive sur $] -2; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle. Par hypothèse de récurrence, $v_n > 1$ et comme f est croissante sur $[1; +\infty[$, on a $f(v_n) > f(1)$, autrement dit $v_{n+1} > 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $v_n - 1 > 0$.

b. Etude des variations de (v_n) : on va montrer par récurrence que (v_n) est décroissante, autrement dit que $P_n: v_{n+1} < v_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on veut montrer que P_0 , c'est-à-dire que $v_1 < v_0$ or $v_1 = \frac{4 \times 5 - 1}{5 + 2} = \frac{19}{7}$ et $v_0 = 5$ donc on a bien $v_1 < v_0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $v_{n+1} < v_n$.

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $v_{n+2} < v_{n+1}$.

Comme $1 < v_{n+1} < v_n$ et que f est croissante sur $[1; +\infty[$ alors $f(v_{n+1}) < f(v_n)$ autrement dit $v_{n+2} < v_{n+1}$.

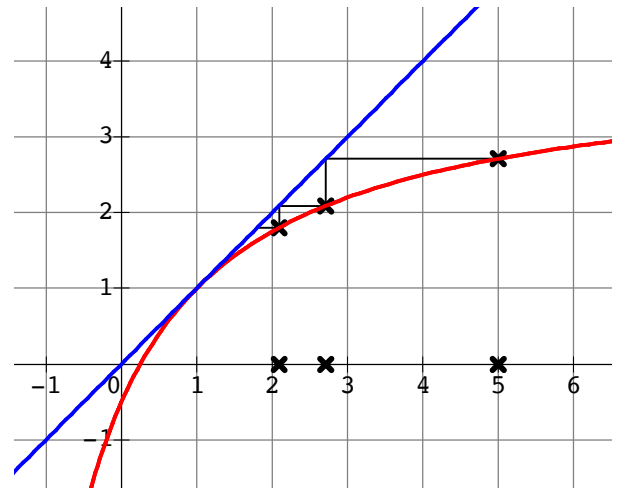
Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} < v_n$ donc (v_n) est décroissante.

Convergence de (v_n) : (v_n) est une suite décroissante minorée par 1 donc elle converge. Si on note l sa limite, alors comme $v_{n+1} = f(v_n)$ et que f est continue sur $[1; +\infty[$ alors $l = f(l)$.

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{4l - 1}{l + 2} \Leftrightarrow l^2 + 2l - 4l + 1 = 0 \Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow (l - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 1$$

Donc la seule limite possible est 1 et donc (v_n) converge vers 1.

3)



a. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{v_{n+1} - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{4v_n - 1}{v_n + 2} - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{v_n + 2}{4v_n - 1 - v_n - 2} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{v_n + 2}{3v_n - 3} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{v_n + 2}{3(v_n - 1)} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{v_n - 1}{3(v_n - 1)} = \frac{1}{3}$$

Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{n}{3} = \frac{3+4n}{12}$

$$u_n = \frac{1}{v_n - 1} \Leftrightarrow v_n - 1 = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{u_n} + 1 \text{ donc } v_n = \frac{12}{3+4n} + 1 = \frac{15+4n}{3+4n}$$

c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+15}{4n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{4n} = 1$$

Donc la suite (v_n) converge bien vers 1.

Sujet n°6 : Nouvelle Calédonie – novembre 2004

1)

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2} ; v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4} ; u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{29}{8} ; v_2 = \frac{59}{16}$$

2)

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{v_n}{2} - \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} = \frac{u_n}{4} + \frac{v_n}{4} - \frac{2u_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$: $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ avec $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$ donc : $w_n = \frac{1}{4^n}$

(w_n) est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre -1 et 1 donc elle converge vers 0.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2}$$

Or $w_n > 0$ pour tout entier naturel n donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{\frac{1}{2}(u_n + v_n)}{2} - \frac{v_n}{2} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{2}v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{w_n}{4}$$

Or $w_n > 0$ donc (v_n) est décroissante.

(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et l'écart entre v_n et u_n converge vers 0 car (w_n) converge vers 0 donc

(u_n) et (v_n) sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent et qu'elles ont la même limite.

4)

a. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{u_{n+1} + u_{n+1} + v_n}{3} = \frac{2u_{n+1} + v_n}{3} = \frac{u_n + v_n + v_n}{3} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$$

Donc la suite (t_n) est constante et toujours égale à $t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{11}{3}$.

b. Notons L la limite des suites (u_n) et (v_n) alors $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ converge vers $\frac{L+2L}{3}$ car il s'agit d'addition de limite et de multiplication d'une limite par un nombre non nul. Par unicité de la limite, nous avons :

$$\frac{L+2L}{3} = \frac{11}{3} \text{ ou encore } L = \frac{11}{3}$$