

Sujets de bac : Probabilités

Sujet n°1 : Sportifs de haut niveau – septembre 1999

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires.

On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

- 1) Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore.
- 2)
 - a. Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches ?
 - b. Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $\frac{68}{165}$.
- 3) Dédurre des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.
- 4) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

Sujet n°2 : extrait de France – juin 2009

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3. On tire simultanément deux jetons de ce sac.

- 1)
 - a. On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ». Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{7}{15}$.
 - b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ». Calculer la probabilité de B .
 - c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
- 2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X .

Sujet n°3 : extrait d'Asie – juin 2007

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

- 1) Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.
 - a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
 - b. Démontrer que $p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{1}{4}$.
 - c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
- 2) Calcul de probabilités.
 - a. Démontrer que $p(S) = 0,934$.
 - b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième)
- 3) Étude d'une variable aléatoire B . Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10€, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5€. On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B .

Sujet n°4 : Amérique du Nord – juin 2007

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.

La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle : E_1 l'évènement « le joueur perd la première partie » ; E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ; E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'évènement $(X = 3)$ est égale à 0,002.
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance de X .

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement : « le joueur perd la n -ième partie », $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .

b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n .

c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Sujet n°5 : Antilles Guyane – juin 2001

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie. Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet.

À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.

L_1 désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie » ; L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie » ; P désigne l'évènement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\frac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\frac{1}{490}$.

1)

- Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
- Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.
- Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2) On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet. On donne : $p(X = 90) = \frac{2}{125}$ et $p(X = 190) = \frac{1}{250}$.

a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\frac{1}{10}$.

b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.

c. Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance de X .