

Correction sujets de bac : Probabilités

Sujet n°1 : sportifs de haut niveau – septembre 1999

1) On tire simultanément 4 boules dans une urne qui en contient 12 donc il y a $\binom{12}{4}$ tirages possibles, soit 495 car $\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 495$. Ces tirages sont supposés équiprobables.

Si un tirage est unicolore, cela signifie qu'il ne contient que des boules blanches ($\binom{4}{4}$ tirages possibles, soit 1 tirage), ou que des boules rouges (1 tirage possible) ou que des boules noires (1 tirage possible). Cela donne donc trois tirages unicolores sur les 495 possibles.

$$p(\text{Unicolore}) = \frac{3}{495} = \boxed{\frac{1}{165}}$$

2)

a. Pour comptabiliser le nombre de tirages bicolores rouges et blancs, on peut utiliser deux méthodes : tirer 4 boules parmi les 8 rouges et blanches mais retirer les tirages unicolores ou compter le nombre de tirage de 1 boule blanche et 3 boules rouges, puis ajouter les tirages de deux boules blanches et deux boules rouges puis encore ajouter les tirages de trois boules blanches et d'une boule rouge.

$$1^{\text{ère}} \text{ méthode : } \binom{8}{4} - 2 = \frac{8!}{4!4!} - 2 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} - 2 = 70 - 2 = 68$$

$$2^{\text{ème}} \text{ méthode : } \binom{4}{1} \times \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \times \binom{4}{1} = 4 \times 4 + 6 \times 6 + 4 \times 4 = 16 + 36 + 16 = 68$$

Au final, il y a 68 tirages bicolores rouges et blancs possibles.

$$p(\text{Rouge\&Blanc}) = \boxed{\frac{68}{495}}$$

b. Il y a trois façons de prendre trois couleurs parmi rouge, blanc et noir. Les probabilités de tirages bicolores avec les couleurs définies seront toutes égales à $\frac{68}{495}$ d'après la question précédente donc :

$$p(\text{Bicolore}) = 3 \times \frac{68}{495} = \boxed{\frac{68}{165}}$$

3) Le tirage est soit unicolore, soit bicolore, soit tricolore.

$$p(\text{Tricolore}) = 1 - p(\text{Unicolore}) - p(\text{Bicolore}) = 1 - \frac{1}{165} - \frac{68}{165} = \frac{96}{165} = \boxed{\frac{32}{55}}$$

4) Calculons la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges et un prélèvement bicolore. Il y a deux possibilités : soit les deux autres boules sont blanches, soit elles sont noires. Dans les deux cas, le nombre de tirages possibles est égal à $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$ soit 36 tirages possibles.

$$p(2R \cap \text{Bicolore}) = 2 \times \frac{36}{495} = \frac{72}{495} = \frac{8}{55}$$

$$p_{\text{Bicolore}}(2R) = \frac{p(2R \cap \text{Bicolore})}{p(\text{Bicolore})} = \frac{8}{55} \times \frac{165}{68} = \boxed{\frac{6}{17}}$$

Sujet n°2 : extrait de France – juin 2009

1)

a. Le nombre de tirages de deux jetons blancs parmi les sept jetons blancs du sac est égale à $\binom{7}{2}$, or $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ donc il y a 21 façons de tirer deux jetons blancs.

Le nombre de tirages total de deux jetons est égal à $\binom{10}{2}$ or $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$.

Les tirages sont équiprobables car les jetons sont indiscernables au toucher donc

$$p(A) = \frac{21}{45} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

b. Le nombre de tirages de deux jetons portant des numéros impairs, sachant qu'il y a 6 jetons portant des numéros impairs est égal à $\binom{6}{2}$ or $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

$$p(B) = \frac{15}{45} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

c. Calculons $p(A \cap B)$. L'événement $A \cap B$ correspond à « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ». Il y a 4 jetons correspondants à ceci donc il y a $\binom{4}{2}$ manières de tirer deux jetons blancs portant des numéros impairs or $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$.

$$p(A \cap B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

$$\text{D'autre part : } p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$$

Donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$ et les événements A et B ne sont pas indépendants.

2)

a. A chaque tirage, on peut obtenir 2, 1 ou 0 jetons blancs donc $X \in \{0; 1; 2\}$. Nous avons déjà calculé $p(X = 2)$ car ceci correspond à l'événement A donc $p(X = 2) = \frac{7}{15}$.

Calculons $p(X = 0)$: on ne souhaite pas tirer de jetons blancs, il faut donc tirer deux jetons noirs parmi les 3 présents. Il y a $\binom{3}{2}$ possibilités de le faire, soit 3 possibilités.

$$p(X = 0) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

La somme des probabilités est égale à 1 donc $p(X = 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 2) = 1 - \frac{7}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$

On pouvait aussi raisonner avec le choix de un jeton blanc parmi les 7 présents (7 choix) et le choix d'un jeton noir parmi les trois présents (3 choix) et donc il y a 21 possibilités d'où $p(X = 1) = \frac{7 \times 3}{45} = \frac{7}{15}$.

$$\text{b. } E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \boxed{1,5}$$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

Sujet n°3 : extrait d'Asie – juin 2007

1) Arbre pondéré

$$\text{a. } p(F) = 0,92 \quad p_F(S) = 0,95 \quad p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,02$$

b.

$$p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{p(\bar{F})} = \frac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{1 - p(F)} = \frac{0,02}{1 - 0,92} = \frac{0,02}{0,08} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

c.

2)

a. On utilise la formule des probabilités totales car F et $\bar{F}$ constitue une partition de l'univers.

$$p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \bar{F}) = 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 = \boxed{0,934}$$

$$\text{b. } p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)} = \frac{0,92 \times 0,95}{0,934} \approx \boxed{0,936}$$

3)

a. Le bénéfice est de 10€ si le jouet vérifie les deux tests, donc

$$p(B = 10) = p(F \cap S) = 0,92 \times 0,95 = 0,874$$

Le bénéfice est de 5€ si le jouet vérifie le test de solidité mais pas celui de finition donc

$$p(B = 5) = p(\bar{F} \cap S) = 0,08 \times 0,75 = 0,06$$

Le bénéfice est nul si le jouet ne vérifie pas le test de solidité donc $p(B = 0) = p(\bar{S}) = 1 - 0,934 = 0,066$

B	10	5	0
probabilité	0,874	0,06	0,066

$$\text{b. } E(B) = 10 \times 0,874 + 5 \times 0,06 + 0 \times 0,066 = \boxed{9,04}$$

Sujet n°4 : Amérique du Nord – juin 2007

1)

a. Le joueur effectue trois parties. Le nombre de défaites est donc un nombre entier compris entre 0 et

3. Donc $X \in \{0; 1; 2; 3\}$

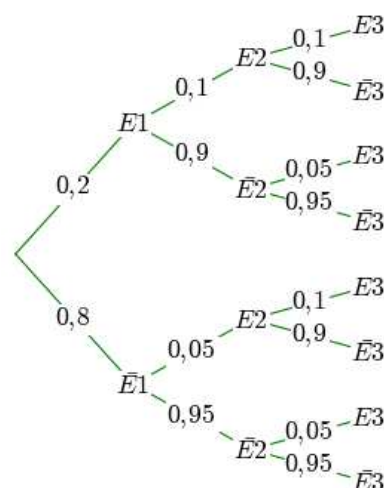
b.

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= p(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) + p(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) + p(\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= 0,2 \times 0,1 \times 0,9 + 0,2 \times 0,9 \times 0,05 + 0,8 \times 0,05 \times 0,1 \\ &= 0,018 + 0,009 + 0,004 = \boxed{0,031} \end{aligned}$$

$$p(X = 3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = \boxed{0,002}$$

c.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002



d.

$$E(X) = 0 \times 0,722 + 1 \times 0,245 + 2 \times 0,031 + 3 \times 0,002 = \boxed{0,313}$$

2)

a. D'après l'énoncé, pour $n \geq 1$: $p_{E_n}(E_{n+1}) = 0,1$ et $p_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) = 0,05$.

$$p(E_n \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) = p_n \times 0,1 = \boxed{0,1p_n}$$

$$p(\bar{E}_n \cap E_{n+1}) = p(\bar{E}_n) \times p_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) = (1 - p_n) \times 0,05 = \boxed{0,05 - 0,05p_n}$$

b. Pour $n \geq 1$, E_n et $\bar{E}_n$ forment une partition de l'univers des possibles donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\bar{E}_n \cap E_{n+1}) = 0,1p_n + 0,05 - 0,05p_n = \boxed{0,05p_n + 0,05}$$

3)

a. Pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05p_n + \frac{1}{20} - \frac{1}{19} = \frac{1}{20}p_n - \frac{1}{380} = \frac{1}{20}\left(p_n - \frac{1}{19}\right) = \frac{1}{20}u_n$$

Ceci montre que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{20}$. Le premier terme est

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{1}{5} - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}$$

$$b. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{20}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{14}{95} \times \frac{1}{20^{n-1}}}$$

$$p_n = u_n + \frac{1}{19} = \boxed{\frac{14}{95} \times \frac{1}{20^{n-1}} + \frac{1}{19}}$$

c. (u_n) est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre -1 et 1 donc elle converge vers 0 et comme $p_n = u_n + \frac{1}{19}$ pour tout entier strictement positif n , on trouve que la limite de (p_n) est

$$\boxed{\frac{1}{19}}.$$

Sujet n°5 : Antilles Guyane – juin 2001

1)

a.

b. On souhaite calculer $p_{\bar{G}}(P)$.

L_1, L_2 et P forment une partition de l'univers d'après l'énoncé donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{\bar{G}}(L_1) + p_{\bar{G}}(L_2) + p_{\bar{G}}(P) = 1. \text{ Or d'après l'énoncé, } p_{\bar{G}}(L_1) = \frac{1}{70} \text{ et } p_{\bar{G}}(L_2) = \frac{1}{490}. \text{ Donc :}$$

$$p_{\bar{G}}(P) = 1 - \frac{1}{70} - \frac{1}{490} = \frac{490 - 7 - 1}{490} = \frac{482}{490} = \boxed{\frac{241}{245}}$$

c. Voir l'arbre

2)

a. On veut montrer que $p_G(L_1) = \frac{1}{10}$.

D'après l'énoncé, $p(X = 190) = \frac{1}{250}$ or, à l'aide de l'arbre, $p(X = 190) = p(G \cap L_1) + p(\bar{G} \cap L_2)$. D'où :

$$p_G(L_1) = \frac{p(G \cap L_1)}{p(G)} = \frac{p(X = 190) - p(\bar{G} \cap L_2)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{250} - \frac{49}{50} \times \frac{1}{490}}{\frac{1}{50}} = \frac{1}{500} \times \frac{50}{1} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

b. On veut calculer $p_G(P)$.

D'après l'énoncé, $p(X = 90) = \frac{2}{125}$ or, à l'aide de l'arbre, $p(X = 90) = p(G \cap P) + p(\bar{G} \cap L_1)$. D'où :

$$p_G(P) = \frac{p(G \cap P)}{p(G)} = \frac{p(X = 90) - p(\bar{G} \cap L_1)}{p(G)} = \frac{\frac{2}{125} - \frac{49}{50} \times \frac{1}{70}}{\frac{1}{50}} = \left(\frac{8}{500} - \frac{7}{500}\right) \times \frac{50}{1} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

c. Loi de probabilité de X :

x_i	-10	90	190	290
$p(X = x_i)$	$\frac{241}{250}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{4}{250}$

$$p(X = -10) = p(\bar{G} \cap P) = p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(P) = \frac{49}{50} \times \frac{241}{245} = \frac{49 \times 241}{50 \times 49 \times 5} = \frac{241}{250}$$

$$p(X = 290) = p(G \cap L_2) = \frac{1}{50} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{250}$$

$$E(X) = -10 \times \frac{241}{250} + 90 \times \frac{2}{125} + 190 \times \frac{1}{250} + 290 \times \frac{4}{250} = \frac{-2410 + 360 + 190 + 1160}{250} = -\frac{700}{250}$$

$$= -\frac{14 \times 50}{50 \times 5} = \boxed{-\frac{14}{5}} = -2,8$$

En moyenne, on perd 2,8 euros par billet acheté.