Sujets de bac : Ln

Sujet n°1 : extrait de Liban – juin 2004

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

1) Etudier les variations de u sur $]0;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2)
   a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$. On note α cette solution.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Montrer l'égalité $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln(x))^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln ;
- A le point de coordonnées $(0;2)$
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0;+\infty[$

1) Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.
   b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c. Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

Sujet n°2 : extrait de La Réunion – juin 2010

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \ln(1+x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On note D la droite d'équation $y = x$.

1)
   a. Etudier le sens de variations de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Déterminer la limite de g en -1.
   b. Déterminer la limite de $\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ en $+\infty$ et en déduire la limite de g en $+\infty$.
   c. Etudier le sens de variations de la fonction g puis dresser le tableau de variations de g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2;3]$.
   e. A l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D.

Sujet n°3 : extrait de Polynésie – septembre 2008

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}).$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$

Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (d).

3) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
4) Etudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2}\ln 2$.
5) Tracer les droites (d) et (d') sur la feuille annexe.

Sujet n°4 : extrait de Nouvelle Calédonie – mars 2005

On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x + 1)$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur la calculatrice dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$; $-5 \leq y \leq 5$. Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2) D'après cette représentation graphique, que peut-on conjecturer :
   a. Sur les variations de f ?
   b. Sur le nombre de solutions de $f(x) = 0$?
3) On va maintenant étudier f.
   a. Etudier les limites de f en -1 et en $+\infty$
   b. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
   c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   d. Ces résultats confirment-ils les conjectures de la question 2 ?
4) On veut représenter sur l'écran de la calculatrice, la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-0{,}1; 0{,}2]$ de façon à visualiser les résultats de la question 3.
   a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous ?
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande des solutions α de $f(x) = 0$.

Sujet n°5 : Amérique de Sud – novembre 2008

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, positive sur $[1\,;\,+\infty[$, et vérifie :

- $\ln(1) = 0$
- Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- Pour tout réel strictement positif x, $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$
- $\ln(2) \approx 0{,}69$ à 10^{-2} près

1) On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$
   a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$
   c. En déduire que la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$ est égale à 0.
2) Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{n}}}$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.