Sujets de bac : Intégration

Sujet n°1 : Liban – juin 2006

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1)$$

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est donnée en annexe.

1)
   a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2) On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.
   a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

   b. Calculer I.

3) À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0;1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

1) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-t-elle ?
2) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Sujet n°2 : Asie – 1998

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Pour tout entier n strictement positif, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1)
   a. Démontrer que, pour tout x dans $[1;e]$ et pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$.
   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2)
   a. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   b. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
   c. En déduire les valeurs de I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3)
   a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.
   b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq e$.
   c. En déduire la limite de I_n.
   d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Sujet n°3 : Antilles Guyane – septembre 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Partie A – Etude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

1)
   a. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ (on pourra poser $\ln x = X$).
   b. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2)

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4) On se propose d'étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T. Pour cela, on considère la fonction ϕ, définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\phi(x) = f(x) - \left(4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right)$$

a. Montrer que $\phi'(x) = \frac{4\ln x - 1}{x} - 4e^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer ϕ''.

b. Etudier le sens de variation de ϕ' sur $]0;+\infty[$.
En déduire que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $\phi'(x) \leq 0$.

c. Calculer $\phi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, déterminer le signe de $\phi(x)$.
En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T.

5) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite T (unité graphique 2 cm).

Partie B – Calcul d'une aire

1) Vérifier que la fonction h, définie par $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$.

2) On pose $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln(x)\, dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$.

a. Calculer I_1.

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_2 = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$.

c. Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x)dx$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\frac{1}{e} \leq x \leq e^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

<u>Sujet n°4 : Antilles Guyane – septembre 2004</u>

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x+2}$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1) Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2)

a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathcal{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solution de l'équation

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{sur} \quad [1;+\infty[$$

b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1;+\infty[$.

c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1) A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer

$$I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$$

2) On définit le solide $\mathcal{S}$ obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$ dans le plan (xOy) (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ du solide est donné par

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$$

a. Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de I.

b. Déterminer alors une valeur approchée à $1cm^3$ près du volume du solide.

<u>Sujet n°5 : Pondichéry – avril 2008</u>

1) Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ et soit H la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t)dt$

a. Justifier que f et H sont bien définies sur$[1;+\infty[$

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2) On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x-1} = x \times \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x)dx = 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx$

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \ln(1-e^{-x}) \leq \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx$ puis de $\int_1^3 f(x)dx$.