

Correction sujet de bac : Intégration

Sujet n°1 : Liban – juin 2006

Partie A

1)

a. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $] -1; +\infty[$ donc sur $[0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

Pour $x \geq 0$, $x+1 \geq 1$ et donc $\ln(x+1) \geq \ln(1)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ d'où $\ln(x+1) \geq 0$. De plus $x \geq 0$ et $x+1 \geq 1 > 0$ donc $\frac{x}{x+1} \geq 0$. Ceci montre que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

La fonction f est donc croissante sur $[0; +\infty[$. On pouvait aussi raisonner en utilisant le fait que f est le produit de deux fonctions croissantes sur $[0; +\infty[$ et positives.

b. Déterminons l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Cette équation est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f'(0) = \ln(1) + 0 = 0$ et $f(0) = 0$ donc l'équation de la tangente est $y = 0$.

C'est donc bien l'axe des abscisses qui est tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

2)

a. Pour $x \neq -1$:

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax(x+1) + b(x+1) + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

Par identification avec $\frac{x^2}{x+1}$, on obtient $\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$.

Donc $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \text{b. } I &= \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(|x+1|) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - (0 - 0 + \ln(1)) = \left[-\frac{1}{2} + \ln(2) \right] \end{aligned}$$

3) La fonction f est positive sur $[0; 1]$ car $f(0) = 0$ et la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ est égale à $\int_0^1 f(x) dx$.

On considère deux fonctions u et v dérivables sur $[0; 1]$ telles que $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = x$.

Alors on peut choisir $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ et on a $u'(x) = \frac{1}{x+1}$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx \quad \text{d'après l'intégration par partiels}$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \ln(2) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

4) On peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0; 1]$ pour la fonction f qui est continue et croissante ou alors utiliser le fait que 0,25 est la valeur moyenne de f sur $[0; 1]$ et que la valeur moyenne est atteinte par f .

Grâce à la calculatrice, on trouve : $\boxed{0,56 \leq \alpha \leq 0,57}$

Partie B

1) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx = \int_0^1 [x^{n+1} \ln(x+1) - x^n \ln(x+1)] dx$$

$$= \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1) dx$$

Or, sur $[0; 1]$, x^n est positif, $\ln(x+1)$ est également positif et $1-x$ est négatif donc $x^n(x-1)\ln(x+1) \leq 0$.

Par croissance de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

(u_n) est minorée par 0 car $x^n \ln(x+1)$ est positif sur $[0; 1]$ et par positivité de l'intégrale, donc (u_n) est une suite décroissante et minorée donc $\boxed{\text{elle converge.}}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \ln(1) \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Comme x^n est positif, on a $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$.

Par croissance de l'intégrale : $0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx$

$$\text{Or } \int_0^1 x^n \ln(2) dx = \ln(2) \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \ln(2) \times \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Donc } \boxed{0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0 \text{ donc par le théorème des gendarmes } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Sujet n°2 : Asie – 1998

1)

a. La fonction $\ln$ est croissante sur $[1; e]$ donc pour tout $x \in [1; e]$, $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(e)$ ou encore $0 \leq \ln(x) \leq 1$. Pour tout entier naturel n , on a donc $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$ ou encore $\boxed{(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0}$

b. Pour tout entier n strictement positif et pour tout $x \in [1; e]$, $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$.

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_1^e (\ln x)^n dx \geq \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx \text{ ou encore } I_n \geq I_{n+1}$$

Ceci montre que $\boxed{(I_n) \text{ est une suite décroissante.}}$

2)

a. On considère deux fonctions u et v dérivables sur $[1; e]$ telles que $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et on peut choisir $v(x) = x$.

$$I_1 = \int_1^e \ln x dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx = e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = \boxed{1}$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux fonctions u et v dérivables sur $[1; e]$ telles que $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = 1$. On a alors $u'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$ et on peut choisir $v(x) = x$. On a alors :

$$I_{n+1} = \int_1^e u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e (n+1)(\ln x)^n dx$$

$$\text{D'où } \boxed{I_{n+1} = e - (n+1)I_n}$$

$$\text{c. } I_2 = e - 2I_1 = \boxed{e - 2 \approx 0,718}$$

$$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 2) = \boxed{6 - 2e \approx 0,563}$$

$$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(6 - 2e) = \boxed{9e - 24 \approx 0,465}$$

3)

a. A la première question, nous avons montré que $\ln(x) \geq 0$ pour $x \in [1; e]$. Par positivité de l'intégrale, nous avons donc $\int_1^e (\ln x)^n dx \geq 0$ ou encore $I_n \geq 0$.

b. Comme pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a $I_n \geq 0$, nous avons aussi $I_{n+1} \geq 0$. Or $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ donc $e - (n+1)I_n \geq 0$ ce qui signifie que $(n+1)I_n \leq e$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ (car $n+1$ est positif).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \text{ donc par encadrement } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nI_n + (I_n + I_{n+1}) = (n+1)I_n + I_{n+1} = e \text{ et de plus}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n + I_{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = e$$

Sujet n°3 : Antilles Guyane – septembre 2001

Partie A

1)

a. On pose $X = \ln(x)$ donc

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3 - \ln x + 2(\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - X + 2X^2 = 0 \\ X = \ln(x) \end{cases}$$

Pour l'équation du second degré : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$ donc l'équation a deux solutions

$$X_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1-5}{4} = -1$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2} \text{ ou } \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = e^{-1}$$

$$\text{Finalement } S = \left\{ e^{\frac{3}{2}}; \frac{1}{e} \right\}$$

b. $-3 - X + 2X^2 > 0 \Leftrightarrow X < -1$ ou $X > \frac{3}{2}$ donc

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \text{ ou } \ln(x) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < e^{-1} \text{ ou } x > e^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Donc } S =]-\infty; \frac{1}{e}[\cup]e^{\frac{3}{2}}; +\infty[$$

2)

a. On pose $X = \ln(x)$ donc $f(x) = -3 - X + 2X^2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} X = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} -3 - X + 2X^2 = \lim_{X \rightarrow -\infty} 2X^2 = +\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} -3 - X + 2X^2 = +\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b. f est de la forme $u + 2v^2$ avec $u: x \mapsto -3 - \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ et $v: x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = u'(x) + 2 \times 2v'(x)v(x)$ d'où

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + 4 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{4 \ln(x) - 1}{x}$$

c. Sur $]0; +\infty[$, x est positif donc $f'(x)$ est du signe de $4 \ln(x) - 1$.

$$4 \ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{4}} \text{ d'où le tableau de variations de } f.$$

x	0	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		0	+
Variations de f	$+\infty$	$-\frac{25}{8}$	$+\infty$

$$f\left(e^{\frac{1}{4}}\right) = -3 - \ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right) + 2\left(\ln e^{\frac{1}{4}}\right)^2 = -3 - \frac{1}{4} + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{13}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{25}{8}$$

3) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, $a = e^{\frac{5}{4}}$ donc $f'(a) = \frac{4 \ln\left(e^{\frac{5}{4}}\right) - 1}{e^{\frac{5}{4}}} = \left(4 \times \frac{5}{4} - 1\right) \times e^{-\frac{5}{4}} = 4e^{-\frac{5}{4}}$ et $f(a) = -3 - \left(\frac{5}{4}\right) + 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{34}{8} + \frac{25}{8} = -\frac{9}{8}$

On obtient donc :

$$y = 4e^{-\frac{5}{4}}\left(x - e^{\frac{5}{4}}\right) - \frac{9}{8} = 4e^{-\frac{5}{4}}x - 4 - \frac{9}{8} \text{ et donc } \boxed{y = 4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}}$$

4)

a. ϕ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ (f et une fonction affine) donc elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\phi'(x) = f'(x) - 4e^{-\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{4 \ln x - 1}{x} - 4e^{-\frac{5}{4}}}$

De la même manière, ϕ' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\phi''(x) = \frac{4 \times \frac{1}{x} \times x - (4 \ln x - 1)}{x^2} = \boxed{\frac{5 - 4 \ln x}{x^2}}$$

b. Sur $]0; +\infty[$, x^2 est positif donc $\phi''(x)$ est du signe de $5 - 4 \ln x$.

$$5 - 4 \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{5}{4} \Leftrightarrow x < e^{\frac{5}{4}}$$

x	0	$e^{\frac{5}{4}}$	$+\infty$
Signe de $\phi''(x)$		0	-
Variation de ϕ'		0	

$$\phi'\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{4 \times \frac{5}{4} - 1}{e^{\frac{5}{4}}} - 4e^{-\frac{5}{4}} = \boxed{0}$$

ϕ' admet un maximum en $e^{\frac{5}{4}}$ et ce maximum est nul donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\boxed{\phi'(x) \leq 0}$.

$$c. \phi\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = -3 - \left(\frac{5}{4}\right) + 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(4e^{-\frac{5}{4}} \times e^{\frac{5}{4}} - \frac{41}{8}\right) = \boxed{0}$$

Or, on sait que $\phi'(x)$ est négatif sur $]0; +\infty[$ donc ϕ est strictement

décroissante sur $]0; +\infty[$. Comme elle s'annule en $e^{\frac{5}{4}}$, cela signifie

qu'elle est positive sur $]0; e^{\frac{5}{4}}[$ et négative sur $]e^{\frac{5}{4}}; +\infty[$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ est au dessus de T sur $]0; e^{\frac{5}{4}}[$ et que $\mathcal{C}$ est en dessous de T sur $]e^{\frac{5}{4}}; +\infty[$.

5) Graphique (voir ci-contre)

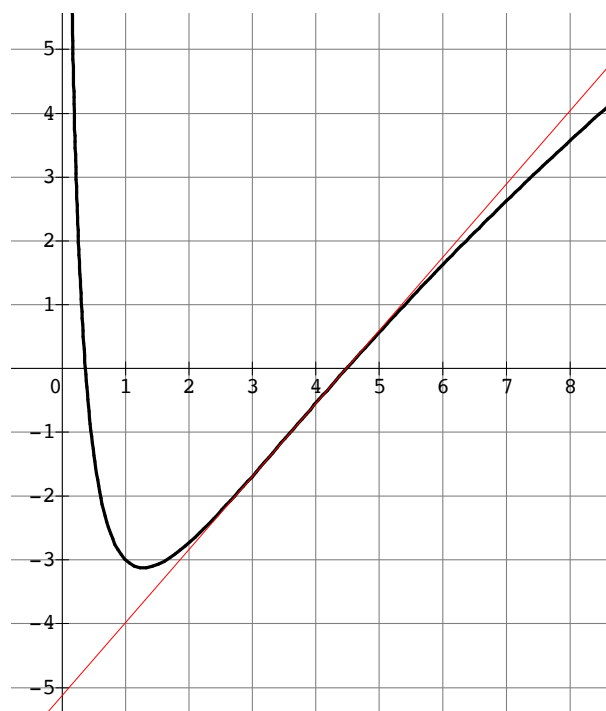
Partie B

1) $h: x \mapsto x \ln(x) - x$ est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $h'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

Donc $\boxed{h \text{ est une primitive de la fonction } \ln \text{ sur }]0; +\infty[}$.

2)

a.



$$I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln(x) dx = [h(x)]_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} = h\left(e^{\frac{3}{2}}\right) - h\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= e^{\frac{3}{2}} \times \frac{3}{2} - e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e} \times (-1) + \frac{1}{e} = \boxed{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{e}}$$

b. On considère deux fonctions u et v dérivables sur $]0; +\infty[$ telles que $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ et $v(x) = x$.

$$I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx = [(\ln x)^2 \times x]_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} - \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} 2 \ln(x) dx = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times e^{\frac{3}{2}} - (-1)^2 \times \frac{1}{e} - 2[h(x)]_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{9}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e} - 2\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{e}\right) = \boxed{\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}}$$

c.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} -3 - \ln(x) + 2(\ln x)^2 dx = -3\left(e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e}\right) - I_1 + 2I_2 = -3e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{e} - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{e} + \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{10}{e}$$

$$= \boxed{-e^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{e}}$$

Sur $\left[\frac{1}{e}; e^{\frac{3}{2}}\right]$, f est négative d'après la partie A, question 1b, donc l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites verticales d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = e^{\frac{3}{2}}$ est égale à :

$$\mathcal{A} = - \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x) dx = \boxed{e^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{e} \text{ u. a}}$$

Sujet n°4 : Antilles Guyane – septembre 2004

Partie A

1) f est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$f'(x) = e^{-x+2} - e^{-x+2} \times x = (1-x)e^{-x+2}$$

L'exponentielle est toujours positive donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
Variations de f			$\nearrow$		
	0				0

En 0 : $f(0) = 0$

En $+\infty$: $f(x) = xe^{-x+2} = \frac{x}{e^x} \times e^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Ceci montre que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f .

2)

a. Graphiquement, l'équation $f(x) = \ln(x)$ ne semble avoir qu'une solution sur $[1; +\infty[$ car les courbes de f et $\mathcal{L}$ ne semblent avoir qu'un unique point d'intersection.

$$b. g(x) = \ln(x) - xe^{-x+2}$$

g est la différence entre deux fonctions dérivables sur $[1; +\infty[$ donc g est dérivable sur $[1; +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - (1-x)e^{-x+2} \quad \text{Or } (1-x) < 0 \text{ sur } [1; +\infty[\text{ donc } -(1-x)e^{-x+2} > 0 \text{ sur } [1; +\infty[.$$

De plus, $\frac{1}{x} > 0$ également donc par somme $g'(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$ et donc g est strictement croissante.

On pouvait aussi raisonner par somme de fonctions : la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, alors que la fonction f est décroissante sur cet intervalle donc $-f$ est strictement croissante.

g étant la somme de la fonction logarithme népérien et de la fonction $-f$, elle est également croissante sur $[1; +\infty[$.

De plus $g(1) = \ln(1) - f(1) = 0 - e = -e < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc par soustraction, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

g est continue car dérivable donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $[1; +\infty[$ que nous noterons α .

c. $\boxed{\alpha \approx 3,005}$

Partie B

1) $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$

On considère deux fonctions u et v dérivables sur $[0; 3]$ telles que $u'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = x^2$.

alors $u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times x^2 \right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{1}{2}e^{-2x} \times 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-6} \times 9 + \frac{1}{2} \times 1 \times 0 + \int_0^3 x e^{-2x} dx \\ &= -\frac{9}{2}e^{-6} + \int_0^3 x e^{-2x} dx \end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on considère deux fonctions u et v dérivables telles que $u'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = x$ alors $u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} I &= -\frac{9}{2}e^{-6} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times x \right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{1}{2}e^{-2x} dx = -\frac{9}{2}e^{-6} - \frac{3}{2}e^{-6} + \frac{1}{2} \int_0^3 e^{-2x} dx = -6e^{-6} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^3 \\ &= -6e^{-6} - \frac{1}{4}e^{-6} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1 - 25e^{-6}}{4}} \end{aligned}$$

2)

a.

$$V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^3 x^2 (e^{-x+2})^2 dx = \pi \int_0^3 x^2 e^{-2x+4} dx = \pi \int_0^3 x^2 e^{-2x} e^4 dx = \boxed{\pi e^4 I}$$

b. $V = \pi e^4 \times \frac{1-25e^{-6}}{4} \approx 40,224u.v$

Or une unité de volume est égale à $4 \times 4 \times 4 \text{ cm}^3$ soit 64 cm^3 donc $\boxed{V \approx 2574 \text{ cm}^3}$

Sujet n°5 : Pondichéry – avril 2008

1)

a. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc le dénominateur s'annule en 0 car $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$ donc f est dérivable sur $[1; +\infty[$.

Donc f est continue sur $[1; +\infty[$ ce qui montre que l'intégrale de f sur $[1; x]$ pour $x \geq 1$ est bien définie donc H est bien définie.

b. $\boxed{H \text{ est la primitive de } f \text{ qui s'annule en } 1.}$

En effet, en notant F une primitive de f , $H(x) = F(x) - F(1)$ donc $H'(x) = F'(x) = f(x)$ donc H est bien aussi une primitive de f . De plus, $H(1) = F(1) - F(1) = 0$.

c. Sur $[1; +\infty[$: x est positif et $e^x - 1$ est également positif donc f est positive.

Ceci montre que l'intégrale de f sur $[1; x]$ de la fonction f est l'aire sous la courbe de f . Plus précisément, $H(3)$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

2)

a. Pour $x > 0$:

$$x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x \times \frac{e^x \times e^{-x}}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{x}{e^x - 1} = f(x)$$

b. On considère deux fonctions u et v dérivables sur $[1; 3]$ telles que $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ alors

$u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln|1 - e^{-x}| = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ (car v' est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 - e^{-x}$) et de plus $e^x > 1$

donc $1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x} > 0$.

En intégrant par parties :

$$\int_1^3 f(x) dx = \left[x \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) \right]_1^3 - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$$

c. Pour $1 \leq x \leq 3$:

$-1 \geq -x \geq -3$ et donc $e^{-1} \geq e^{-x} \geq e^{-3}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - e^{-3}$ car la fonction $x \mapsto 1 - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Comme $\ln$ est croissant sur $]0; +\infty[$ et que $1 - e^{-1} > 0$, alors $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$

d. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) dx \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) dx \quad \text{et donc}$$

$$\boxed{2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)}$$

On en déduit,

$$3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\boxed{\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$