Sujets de bac : Exponentielle

Sujet 1 : Polynésie – septembre 2002

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

1) Etudier la parité de f.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
3) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Donner l'interprétation graphique de ces limites.
4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5) Soit α un réel de l'intervalle $]-1; 1[$. Montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Sujet 2 : Réunion – juin 2007

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1.
   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Etablir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)$.
      En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, sans démontrer, la limite de $\frac{x}{e^x - 1}$ quand x tend vers 0 et démontrer que f est continue en 0.
3.
   a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $e^x \geq x + 1$ et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.
   b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
   c. Donner le tableau de variations de f.
4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ de la courbe $\mathcal{C}$.
   a. Etablir que $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$ puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').
   b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

Sujet 3 : Amérique du Sud – novembre 2001

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$$

Et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A : Etude de la fonction f.

1)
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4)
   a. Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   b. Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude d'une tangente

1) On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f.
   a. Montrer que, pour tout réel x, $f''(x) = 4(2x - 1)e^{-2x}$
   b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.

2) Soit B le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe $\mathcal{C}_f$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en B.

3) On veut étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T. Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}\right)$$

a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b. Etudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x.
En déduire le sens de variations de g' sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Que peut-on en conclure sur la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T ?

4) Dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, placer les points A et B puis tracer T et la courbe $\mathcal{C}_f$.

<u>Sujet 4 : Centres étrangers – juin 2010</u>

On considère deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère du plan.
On va démontrer qu'il existe une unique tangente T commune aux deux courbes.

1) Sur le graphique ci-dessous, tracer approximativement une telle tangente. Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $\mathcal{C}_1$ puis celle du point de contact avec $\mathcal{C}_2$.

2) On note a et b deux réels quelconques, A le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse a et B le point de $\mathcal{C}_2$ d'abscisse b.

a. Déterminer une équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}_1$ au point A.

b. Déterminer une équation de la tangente T_B à $\mathcal{C}_2$ au point B.

c. En déduire que les droites T_A et T_B sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$

d. Montrer que ce système est équivalent à $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$

3) Nous allons démontrer que l'équation $(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

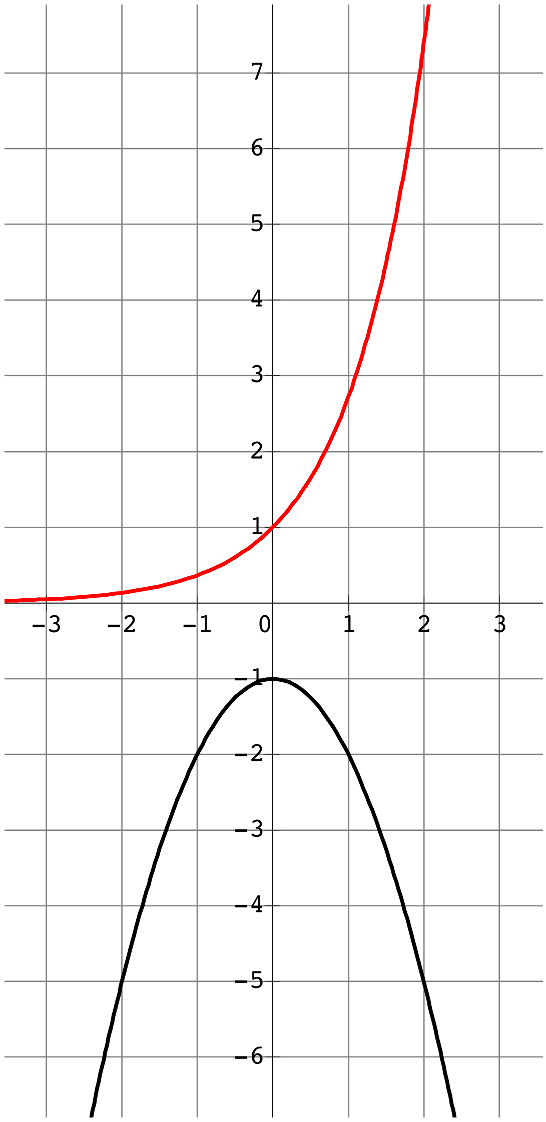
a. Montrer que pour $x < 0$, $e^{2x} - 4 < 0$ et que $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que (E) n'a pas de solutions dans $]-\infty; 0[$.

c. Démontrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

d. Démontrer que (E) a une unique solution dans $[0; +\infty[$. On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4) On prend A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites T_A et T_B sont confondues.



7
6
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3
−4
−5
−6