Sujets de bac : Droites et plans dans l'espace

Sujet n°1 : Polynésie – septembre 2003

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ orthonormé. Soit s un nombre réel.
On donne les points $A(8;0;8)$, $B(10;3;10)$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -5+3s \\ y = 1+2s \\ z = -2s \end{cases}$$

1)
   a. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.
   b. Démontrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.

2)
   a. Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et contient Δ. Montrer que $\vec{n}(2;-2;1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
   b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$ est indépendante de M.
   c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan (xOy).

3) La sphère $\mathcal{S}$ est tangente à $\mathcal{P}$ au point $C(10;1;6)$. Le centre Ω de $\mathcal{S}$ se trouve à la distantce $d=6$ de $\mathcal{P}$ du même côté que O. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

Sujet n°2 : Polynésie – juin 2006

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on donne les points $A(0;0;2)$; $B(0;4;0)$ et $C(2;0;0)$
On désigne par I le milieu du segment $[BC]$, par G l'isobarycentre des points A,B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ est le plan (AIO) ».
Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$ est la sphère de diamètre $[BC]$ ».
Proposition 3 : « le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à 4 ».
Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y+2z=4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$. »
Proposition 5 : « la droite (CG) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= 2-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ ».

Sujet n°3 : Réunion – juin 2006

Pour chacune des questions 1,2,3 *et* 4*,* ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur* 1 *point.*
Toute réponse juste rapporte 0,5 *point. Donner plus de* 2 *réponses à une question entraîne la nullité de la question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) Soit P le plan d'équation $2x+3y+4z-1=0$.
   a. La distance du point O au plan P est égale à 1.
   b. La distance du point O au plan P est égale à $\frac{1}{\sqrt{29}}$
   c. Le vecteur $\vec{n}\left(1;\frac{3}{2};2\right)$ est un vecteur normal au plan P.
   d. Le plan Q d'équation $-5x+2y+z=0$ est parallèle au plan P.

2) On désigne par P le plan d'équation $2x+y-z=0$, et par D la droite passant par le point $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-4;-2)$.
   a. La droite D est parallèle au plan P.

b. La droite D est orthogonale au plan P.
c. La droite D est sécante avec le plan P.
d. Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

3) On désigne par E l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.
b. L'ensemble E est une droite passant par A.
c. L'ensemble E est un plan passant par A.
d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; -3; 2)$.

4) $ABCD$ est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).
a. Le plan P contient toujours le point D
b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment $[BC]$.

Sujet n°4 : Réunion – septembre 2010

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$.
On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives :

$$x + y + z = 0 \text{ et } 2x + 3y + z - 4 = 0$$

1) Montrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2) Soit λ un nombre réel.
On considère le plan $\mathcal{P}_\lambda$ d'équation $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$.
a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_\lambda$.
b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont confondus.
c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont perpendiculaires ?
3) Déterminer une représentation paramétriques de la droite D', intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{-1}$.
Montrer que les droites D et D' sont confondues.
4) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On considère le point $A(1; 1; 1)$.
Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

Sujet n°5 : Polynésie – septembre 2011

Partie A

On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $EF^2 = \overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF}$.
Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de $[AB]$.
1) Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

2) Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que

$$MA^2 + MB^2 = AB^2$$

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et $x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1; 0; 4)$ et $(3; -4; 2)$.
1) Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On nomme (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
2)

a. Montrer que le point A appartient à la droite (Δ).

b. Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

3) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite (Δ). On précisera les coordonnées de ces points.

<u>Sujet n°6 : Amérique du sud – novembre 2011</u>

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1;-1;1)$ et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}\ \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad \mathcal{D}'\ \begin{cases} x = 3t' \\ y = t'+2 \\ z = 3t'-2 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite $\mathcal{D}$ ».
Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$».
Proposition 3 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales ».
Proposition 4 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires ».
Proposition 5 : « La distance du point A au plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ est $\frac{\sqrt{14}}{7}$