

Correction sujets de bac : Droites et plans dans l'espace

Sujet n°1 : Polynésie – septembre 2003

1)

a. Δ est dirigée par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par $A(8; 0; 8)$.

$$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 3t \\ z = 8 + 2t \end{cases}$$

b. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ .

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles. Déterminons leur éventuelle intersection :

$$\begin{cases} 8 + 2t = -5 + 3s \\ 3t = 1 + 2s \\ 8 + 2t = -2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}(3s - 13) \\ t = \frac{1}{3}(1 + 2s) \\ -5 + 3s = -2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 1 \\ s = 1 \end{cases} \text{ ce qui est impossible. Donc } \mathcal{D} \text{ et } \Delta \text{ ont une intersection vide}$$

sans être parallèles donc elles sont non coplanaires.

2)

a. $\mathcal{P}$ contient Δ donc il contient A et B . De plus, il est parallèle à $\mathcal{D}$ donc le vecteur $\vec{u}$ a une direction contenue dans $\mathcal{P}$. $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires dirigeant $\mathcal{P}$. Il suffit donc de vérifier que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\vec{u}$ pour montrer que $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 2 = 4 - 6 + 2 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux.}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 3 - 2 \times 2 + 1 \times (-2) = 6 - 4 - 2 = 0 \text{ donc } \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont orthogonaux.}$$

Finalement $\vec{n}$ est bien un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $2x - 2y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Or $A \in \mathcal{P}$ donc $2 \times 8 - 0 + 1 \times 8 + d = 0$ et donc $d = -24$. Une équation de $\mathcal{P}$ est : $2x - 2y + z - 24 = 0$

b. On considère un point $M(-5 + 3s; 1 + 2s; -2s)$ de $\mathcal{D}$.

$$d(M; \mathcal{P}) = \frac{|2(-5 + 3s) - 2(1 + 2s) + (-2s) - 24|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-10 + 6s - 2 - 4s - 2s - 24|}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Donc la distance d'un point M quelconque de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$ est toujours égale à 12. Elle est donc indépendante du point M .

c. On considère d la droite d'intersection entre $\mathcal{P}$ et (xOy) . Alors

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 24 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 12 \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc en posant } y = t, \text{ on trouve } \begin{cases} x = t + 12 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

3) La distance entre Ω et $\mathcal{P}$ est égale à 6 donc le rayon de la sphère est 6.

$\overrightarrow{C\Omega}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc il est colinéaire à $\vec{n}(2; -2; 1)$ donc $\begin{cases} x - 10 = 2k \\ y - 1 = -2k \\ z - 6 = k \end{cases}$. De plus $C\Omega = 6$ ou encore

$$C\Omega^2 = 36 \text{ or } C\Omega^2 = 36 \Leftrightarrow (2k)^2 + (-2k)^2 + k^2 = 36 \Leftrightarrow 9k^2 = 36 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = 2 \text{ ou } k = -2.$$

Les deux points de coordonnées $(14; -3; 8)$ et $(6; 5; 4)$ sont les deux points susceptibles d'être le centre de $\mathcal{S}$.

De plus, Ω est du même côté de $\mathcal{P}$ que O donc $2x - 2y + z - 24 < 0$.

$$2 \times 14 - 2 \times (-3) + 8 - 24 = 18 > 0 \text{ et } 2 \times 6 - 2 \times 5 + 4 - 24 = -18 < 0 \text{ donc } \Omega(6; 5; 4).$$

$$\text{Une équation de } \mathcal{S} \text{ est donc : } \boxed{(x - 6)^2 + (y - 5)^2 + (z - 4)^2 = 36}$$

Sujet n°2 : Polynésie – juin 2006

Proposition 1 : L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est le plan perpendiculaire à (BC) passant par A . Il reste à vérifier si I et O appartiennent bien à ce plan et si A, I et O définissent bien un plan.

$$O(0; 0; 0) \text{ donc } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ donc } O \text{ appartient bien au plan voulu.}$$

$I(1; 2; 0)$ donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 8 + 0 = -6$ donc I n'appartient pas au plan perpendiculaire à (BC)

passant par A donc la proposition est fausse.

Proposition 2 : Pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{MI}$ car I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Mais aussi $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}$. D'où

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{CB}\| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}BC$$

Concrètement M appartient à la sphère de centre I et de rayon $\frac{1}{2}BC$. Cette sphère correspond à la sphère de diamètre $[BC]$. Donc la proposition 2 est vraie.

Proposition 3 : OAB est un triangle rectangle en O . En effet : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$. Donc

$$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

Par ailleurs, l'équation du plan (AOB) est clairement $x = 0$.

$$d(C; (AOB)) = \frac{|2|}{\sqrt{1^2}} = 2$$

Donc $\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AOB} \times d(C; (AOB)) = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3} \neq 4$ donc la proposition 3 est fausse.

Proposition 4 : On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + y + 2z = 4$. Regardons s'il passe par les points A, B et C .

Pour $A : 2 \times 2 + 0 + 0 = 4$ donc $A \in \mathcal{P}$.

Pour $B : 0 + 4 + 0 = 4$ donc $B \in \mathcal{P}$.

Pour $C : 0 + 0 + 2 \times 2 = 4$ donc $C \in \mathcal{P}$.

Par ailleurs, A, B et C ne sont clairement pas alignés donc ils définissent bien un plan qui correspond au plan $\mathcal{P}$.

On note H' le point de coordonnées $\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right) : OH' = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{16}{81} + \frac{64}{81}} = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$$d(O; (ABC)) = \frac{|0 + 0 + 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}$$

On a donc bien $OH' = d(O; (ABC))$. Il reste à vérifier que $H' \in (ABC) : 2 \times \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + 2 \times \frac{8}{9} = \frac{16+4+16}{9} = \frac{36}{9} = 4$ donc on a bien $H' \in (ABC)$ et H' est bien le projeté orthogonal de O sur (ABC) et donc la proposition 4 est vraie.

Proposition 5 : G a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AG) est dirigée par $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$M \in (AG) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z - 2 = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Donc la proposition 5 est vraie.

Sujet n°3 : Réunion – juin 2006

$$1) d(O; P) = \frac{|2 \times 0 + 3 \times 0 + 4 \times 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

Un vecteur normal à P est le vecteur $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{n}_1$ donc $\vec{n}$ est normal à P .

$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q et $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -10 + 6 + 4 = 0$ donc Q et P sont orthogonaux.

Finalement, les réponses vraies sont les réponses : b et c

$$2) \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } P. \vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 4 + 2 = 0 \text{ donc } \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont orthogonaux ce qui indique que } D$$

est parallèle au plan P . De plus $A \notin P$ car $2 + 1 - 1 \neq 0$ donc D et P sont strictement parallèles.

Par élimination, la réponse d doit être vraie... or c'est le système paramétrique obtenu en utilisant le point A et le vecteur directeur $\vec{u}$. Finalement, les réponses vraies sont les réponses : a et d

3) $1 + 1 + 1 = 3$ et $2 - 1 = 1$ donc $A \in E$. Par ailleurs, $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$ représente l'intersection de deux plans P_1 et P_2 d'équations respectives $x + y + z - 3 = 0$ et $2x - z - 1 = 0$. L'intersection de deux plans est une droite. Déterminons une autre point de cette droite :

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2x - 1 - 3 = 0 \\ z = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ z = 2x - 1 \end{cases}$$

En prenant $x = 2$, on trouve $y = -2$ et $z = 3$ donc $B(2; -2; 3)$ appartient à E .

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de la droite E .

Finalement, les réponses vraies sont les réponses : b et d

4) Soit M un point de P . Alors, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

A priori, il n'y a aucune raison pour que $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ donc la réponse a est fausse.

Par contre, en notant H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ or ce dernier produit scalaire est nul car (AH) et (BC) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et H appartient à P . Comme A et H appartiennent à P , la droite (AH) est contenue dans P .

Tous les points du plan médiateur de $[BC]$ sont équidistants de B et C or il n'y a aucune raison pour que $AB = AC$ donc la réponse d est fausse.

Finalement, les réponses vraies sont les réponses : b et c

Sujet n°4 : Réunion – septembre 2010

1) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{Q}$. $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont clairement pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants et leur intersection est une droite.

$$M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 4 \\ y = z + 4 \end{cases} \text{ donc en posant } z = t, \text{ on trouve une}$$

$$\text{représentation paramétrique de } D : \begin{cases} x = -2t - 4 \\ y = t + 4 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2)

$$a. \mathcal{P}_\lambda : (1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - \lambda x - \lambda y - \lambda z + 2\lambda x + 3\lambda y + \lambda z - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$$

Donc le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 + 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_\lambda$.

b. Deux plans sont confondus si et seulement si ils sont parallèles avec un point commun, autrement dit si leurs vecteurs normaux sont colinéaires et qu'ils passent par un même point.

$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $O(0; 0; 0)$ appartient à $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires et } O \in \mathcal{P}_\lambda \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R}, \vec{n} = k\vec{n}_1 \text{ et } -4\lambda = 0 \Leftrightarrow \text{il existe } k, \begin{cases} 1 + \lambda = k \\ 1 + 2\lambda = k \text{ et } \lambda = 0 \\ 1 = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0$$

Donc il n'existe qu'une seule valeur pour que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ soient confondus : $\lambda = 0$

c. Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

$$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P}_\lambda \text{ perpendiculaires} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda + 1 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Donc pour $\lambda = -1$ les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont perpendiculaires.

3) P_{-1} a pour équation : $2x + 2y + 2z - 2x - 3y - z + 4 = 0$ soit $-y + z + 4 = 0$

$$M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 4 \\ y = z + 4 \end{cases} \text{ donc, en posant } z = t, \text{ on trouve :}$$

$$D' \begin{cases} x = -2t - 4 \\ y = t + 4 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On retrouve la représentation paramétrique de D donc D et D' sont confondues.

4) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{-1}$ sont perpendiculaires et leur droite d'intersection est la droite D .

Pour calculer la distance de A à D , on peut commencer par calculer la distance de A à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}_{-1}$ puis utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B avec B le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ et C le projeté orthogonal de A sur D .

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad d(A; \mathcal{P}_{-1}) = \frac{|-1+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$d(A; D)^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 = d(A, \mathcal{P})^2 + d(A; \mathcal{P}_{-1})^2 = 2 + 8 = 10$$

$$\text{Donc } d(A; D) = \sqrt{10}$$

Sujet n°5 : Polynésie – septembre 2011

Partie A

1) Pour M dans l'espace :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + IA^2 + MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{MI} + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \frac{1}{2}AB^2 \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \quad \text{car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \text{car } I \text{ est le milieu de } [AB]. \end{aligned}$$

2)

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2MI^2 = \frac{1}{2}AB^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}AB^2$$

$\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}AB$

(E) est donc le cercle de centre I passant par A .

Partie B

1) $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (P) et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à (Q) . $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont clairement pas colinéaires donc (P)

et (Q) ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants.

2)

a. $A(-1; 0; 4) : 3 \times (-1) + 4 \times 0 + 4 - 1 = 0$ donc $A \in (P)$ et $-1 - 2 \times 0 - 4 + 5 = 0$ donc $A \in (Q)$. Comme A appartient à (P) et (Q) , il appartient à leur intersection donc à (Δ) .

b. On considère le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$. On a donc $\begin{cases} x_C + 1 = 1 \\ y_C = -2 \\ z_C - 4 = 5 \end{cases}$ soit $C(0; -2; 9)$. Regardons si ce

point appartient aussi à (Δ) donc à (P) et (Q) :

$$3 \times 0 + 4 \times (-2) + 9 - 1 = 0 \text{ donc } C \in (P) \quad \text{et} \quad 0 - 2 \times (-2) - 9 + 5 = 0 \text{ donc } C \in (Q).$$

Finalement $C \in (\Delta)$. La droite (Δ) est donc la droite (AC) et elle est bien dirigée par $\overrightarrow{AC}$ donc par $\vec{u}$.

c. Une représentation paramétrique de (Δ) passant par A , de vecteur directeur $\vec{u}$ est donc

$$\begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2k \\ z = 4 + 5k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

3) I est le milieu de $[AB]$ avec $I(1; -2; 3)$. $AI = \sqrt{(1+1)^2 + (-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{9} = 3$ donc (E) est le cercle d'équation $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

$$M \in (E) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2k \\ z = 4 + 5k \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2k \\ z = 4 + 5k \\ (k-2)^2 + (2-2k)^2 + (1+5k)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2k \\ z = 4 + 5k \\ 30k^2 - 2k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2k \\ z = 4 + 5k \\ k = 0 \text{ ou } k = \frac{1}{15} \end{cases}$$

La valeur $k = 0$ nous permet de retrouver que le point A appartient bien aux deux ensembles (E) et (Δ) .

L'autre point d'intersection est alors $D\left(-\frac{14}{15}; -\frac{2}{15}; \frac{13}{3}\right)$.

Sujet n°6 : Amérique du Sud – novembre 2011

Proposition 1 : FAUX

$$A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 1 = -1 \\ -3t + 2 = -1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \text{ ce qui est impossible donc } A \text{ n'appartient pas à } \mathcal{D}.$$

Proposition 2 : VRAI

Un plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui dirige $\mathcal{D}$. Une équation du plan est donc $2x - 3y + z + d = 0$. Comme ce plan passe par O , on trouve $d = 0$ et donc $2x - 3y + z = 0$ comme équation.

Proposition 3 : FAUX

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dirige } \mathcal{D} \text{ et } \vec{u}'\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ dirige } \mathcal{D}'.$$

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 \times 3 - 3 \times 1 + 1 \times 3 = 6 - 3 + 3 = 6$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas orthogonaux et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas orthogonales.

Proposition 4 : FAUX

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont clairement pas colinéaires donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

Cherchons à savoir si elles sont sécantes ; on doit donc résoudre le système :
$$\begin{cases} 2t - 1 = 3t' \\ -3t + 2 = t' + 2 \\ t = 3t' + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 1 = 3t' \\ -3t + 2 = t' + 2 \\ t = 3t' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t' + 4 - 1 = 3t' \\ -9t' - 6 + 2 = t' + 2 \\ t = 3t' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t' = -0,6 \\ t = 3t' + 2 \end{cases} \text{ ce qui est donc impossible.}$$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont donc pas sécantes. Elles sont donc non coplanaires.

Proposition 5 : VRAI

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|2 \times (-1) - 3 \times (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$