Sujets de bac : Applications géométriques des nombres complexes

Sujet n°1 : Amérique du Nord – juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$.

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z $(z \neq i)$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1) Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.
2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.
3)
    a. Démontrer que, pour tout nombre complexe $z \neq i$, $(z' + 2i)(z - i) = 1$.
    b. En déduire que, pour tout point M d'affixe z $(z \neq i)$:

$$BM' \times AM = 1 \text{ et } \left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) + k \times 2\pi \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4)
    a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
    b. En utilisant les résultats de la question 3, placer E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.
5) Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?

Sujet n°2 : Amérique du Sud – novembre 2009

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et -2 et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{\bar{z}(z - 2)}{\bar{z} - 2}.$$

1)
    a. Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + i$.
    b. Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
    c. Etablir que les droite s(AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$)

On cherche à généraliser les propriétés 1b et 1c pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3)
    a. Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z - 2)(\bar{z} - 2)$ est réel.
    b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2 $\frac{z'+2}{z-2}$ est réel.
    c. Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
4) Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question 1c.
5) Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3 - 2i$.

Sujet n°3 : Antilles-Guyane – septembre 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et b=$-4\sqrt{3} + 4i$. Calculer les distances OA, OB et AB.

En déduire la nature du triangle OAB.

3) On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe d de D.

4) On appelle G le barycentre des points pondérés $(O; -1)$, $(D; 1)$ et $(B; 1)$.
   a. Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique 1 cm).
   c. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

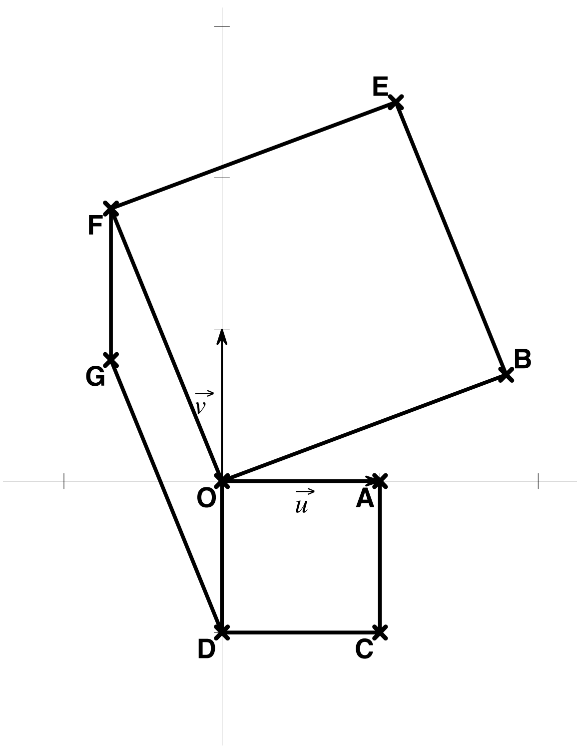
5)
   a. Justifier l'égalité $\frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC})$, ainsi que la valeur du rapport $\frac{GC}{GA}$.

Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

<u>Sujet n°4 : Asie – juin 2009</u>

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On place dans ce repère les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés directus $ODCA$ et $OBEF$ comme indiqué sur la figure ci-dessous

1) Déterminer les affixes c et d des points C et D.
2) On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de r.
   b. En déduire que l'affixe f du point F est ib.
   c. Déterminer l'affixe e du point E.
3) On appelle G le point tel que le quadrilatère $OFGD$ soit un parallélogramme. Démontrer que l'affixe g du point G est égal à $i(b-1)$.
4) Démontrer que $\frac{e-g}{c-g} = i$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle isocèle.



<u>Sujet n°5 : Liban – mai 2011</u>

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Pré-requis : On suppose connu le résultat suivant :
Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à 2π près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 1 - i \quad \text{et} \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

1) Déterminer le module et un argument de z_A.
2)
   a. Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.
   b. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = \left(1 + \sqrt{3}\right)e^{\frac{i\pi}{3}}$.
   c. En déduire la forme exponentielle de z_B.
3) On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
   a. Déterminer l'affixe du point B_1.
   b. En déduire que B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.
4) Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

   a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).
   b. Soit M un point distinct de O.

Son affixe z est égale à $\rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

   c. Déterminer l'ensemble (E).