

Correction

Sujet n°1 : Amérique du Nord – juin 2010

1) Le triangle ADE est un triangle équilatéral direct donc E est l'image de D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On peut aussi chercher l'abbixe du point E tel que $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$ et $AD = AE$. Pour cela, on cherchera z_E tel que $\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = e^{\frac{i\pi}{3}}$...

Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on a $z_E = (z_D - z_A) \times e^{\frac{i\pi}{3}} + z_A$

$$z_E = (1 - i) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + i = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$$

2) On a $z_D = 1$:

$$z'_D = f(z_D) = f(1) = \frac{2 - i}{i + 1} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{2} = \frac{1 - 3i}{2}$$

3)

a. Pour $z \neq i$:

$$(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z - i}{iz + 1} + 2i\right)(z - i) = \frac{((2z - i) + 2i(iz + 1))(z - i)}{iz + 1}$$

$$= \frac{(2z - i - 2z + 2i)(z - i)}{iz + 1} = \frac{iz + 1}{iz + 1} = \boxed{1}$$

b. Pour $z \neq i$:

$$|(z' + 2i)(z - i)| = 1 \text{ donc } |z' - z_B| \times |z - z_A| = 1 \text{ ou encore } \boxed{BM' \times AM = 1}$$

$$\arg((z' + 2i)(z - i)) = k \times 2\pi \text{ d'où } \arg(z' - z_B) + \arg(z - z_A) = k \times 2\pi \text{ ou encore}$$

$$\boxed{(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi} \text{ où } k \text{ est un nombre entier relatif.}$$

4)

a. Calcul de AD et AE :

$$AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ donc } \boxed{D \in (C)}.$$

$$AE = |z_E - z_A| = \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) - i \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{2} \text{ donc } \boxed{E \in (C)}$$

b. $z_E \neq i$ donc les propriétés de la question 3b s'appliquent. On a donc $BE' \times AE = 1$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$.

Comme $AE = \sqrt{2}$, on a donc $BE' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc E' appartient au cercle de centre B et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour tracer précisément ce cercle, on utilise le fait que $AD = AE$ et donc $BD' = BE'$ donc on trace le cercle de centre B passant par D' . De plus,

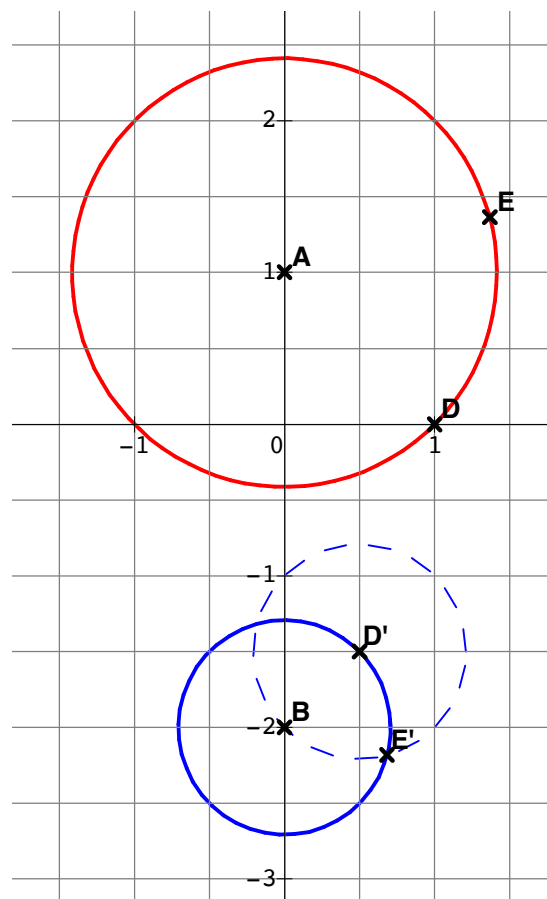
$$(\overrightarrow{BD'}; \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{BD'}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BE'}) + k \times 2\pi = -(\vec{u}; \overrightarrow{BD'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BE'}) + k \times 2\pi = (\vec{u}; \overrightarrow{AD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$$

$$= (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) + k \times 2\pi = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$$

Il ne reste plus qu'à placer le point E' .

c. Le triangle $BD'E'$ est donc un triangle équilatéral indirect. En effet, nous avons montré que

$$BD' = BE' \text{ et } (\overrightarrow{BD'}; \overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi.$$



Sujet n°2 : Amérique du Sud – novembre 2009

1)

a. Pour $z = 1 + i$:

$$z' = \frac{(1-i)(1+i-2)}{1-i-2} = \frac{(1-i)(-1+i)}{-1-i} = \frac{2i(-1+i)}{1^2+1^2} = \boxed{-1-i} \quad \text{L'affixe de } P' \text{ est } \boxed{-1-i}$$

b. Affixe de $\overrightarrow{AP}$: $z_{\overrightarrow{AP}} = z_P - z_A = 1 + i - 2 = -1 + i$

Affixe de $\overrightarrow{BP'}$: $z_{\overrightarrow{BP'}} = z_{P'} - z_B = -1 - i + 2 = 1 - i$

Donc $z_{\overrightarrow{BP'}} = -z_{\overrightarrow{AP}}$ et on a : $\overrightarrow{BP'} = -\overrightarrow{AP}$ ce qui montre que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BP'}$ sont colinéaires et donc (AP) et (BP') sont parallèles.

c. Pour démontrer que (AP) et (PP') sont perpendiculaires, on peut calculer le produit scalaire des deux vecteurs après avoir calculer leurs coordonnées ou on peut calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{PP'})$ grâce aux complexes.

$(\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{PP'}) = \arg\left(\frac{z_{P'} - z_P}{z_P - z_A}\right)$ or $\frac{z_{P'} - z_P}{z_P - z_A} = \frac{-1-i-1-i}{1+i-2} = \frac{(-2-2i)(-1-i)}{1^2+1^2} = 2i$ et $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{PP'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.

2) On cherche les points invariants par f donc on résout $z' = z$ dans $\mathbb{C} - \{2\}$:

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}(z-2)}{\bar{z}-2} = z \Leftrightarrow \bar{z}(z-2) = z(\bar{z}-2) \Leftrightarrow z\bar{z} - 2\bar{z} = z\bar{z} - 2z \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Donc les points invariants par f sont les points d'affixe réelle donc il s'agit de l'axe des réels privé du point A.

3)

a. Pour $z \in \mathbb{C}$: $(z-2)(\bar{z}-2) = (z-2)(\overline{z-2}) = |z-2|^2$ car $z\bar{z} = |z|^2$ et donc $(z-2)(\bar{z}-2) \in \mathbb{R}$

b. Pour $z \neq 2$:

$$\frac{z' + 2}{z - 2} = \frac{\bar{z}(z-2) + 2(\bar{z}-2)}{\bar{z}-2} \times \frac{1}{z-2} = \frac{z\bar{z} - 4}{(\bar{z}-2)(z-2)} = \frac{|z|^2 - 4}{|z-2|^2}$$

Comme $|z|$ et $|z-2|$ sont des réels, nous pouvons dire que $\frac{z'+2}{z-2}$ est un réel.

c. Pour $z \neq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{z' + 2}{z - 2} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z' + 2}{z - 2}\right) = 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z' - z_B}{z - z_A}\right) = 0 [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM'}) = 0 [\pi] \\ &\Leftrightarrow (AM) \text{ et } (BM') \text{ parallèles} \end{aligned}$$

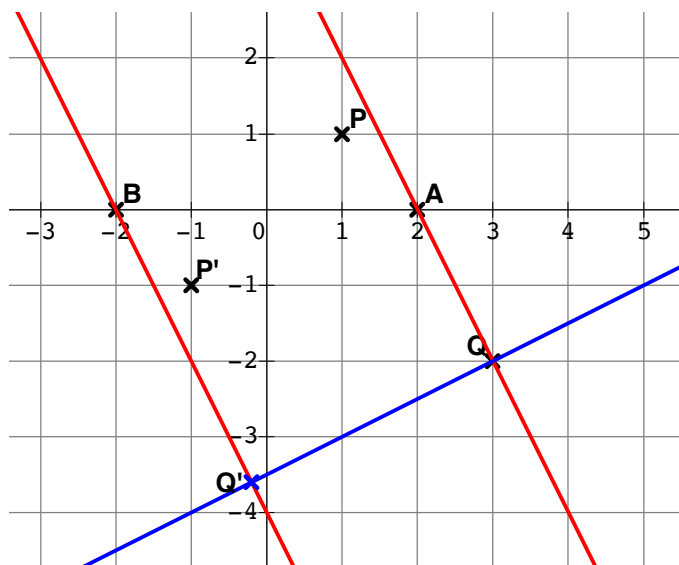
4) Le raisonnement est similaire à la question 3 mais nous allons montrer que $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ et pour cela,

nous allons montrer que $\frac{z'-z}{z-z_A} \in i\mathbb{R}$. Pour $z \neq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{z' - z}{z - z_A} &= \frac{\bar{z}(z-2) - z(\bar{z}-2)}{\bar{z}-2} \times \frac{1}{z-2} = \frac{2(z-\bar{z})}{(\bar{z}-2)(z-2)} \\ &= \frac{2i \operatorname{Im}(z)}{|z-2|^2} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $\arg\left(\frac{z'-z}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$. Les droites (AM) et (MM') sont donc perpendiculaires.

5) On considère un point M distinct de A. D'après les questions précédentes, (AM) et (BM') sont perpendiculaires et (AM) et (MM') sont perpendiculaires. Pour placer M' , on trace donc la parallèle à (AM) passant par B et la perpendiculaire à (AM) passant par M. Le point d'intersection de ces deux droites est le point M' .



Sujet n°3 : Antilles-Guyane – septembre 2001

1) $z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0 : \Delta = (8\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 64 = -64$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-8\sqrt{3} + i\sqrt{64}}{2} = -4\sqrt{3} + 4i$ et $z_2 = -4\sqrt{3} - 4i$. D'où $S = \{-4\sqrt{3} + 4i; -4\sqrt{3} - 4i\}$

2) $OA = |z_0 - a| = |4\sqrt{3} + 4i| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \boxed{8}$

$OB = |z_0 - b| = |4\sqrt{3} - 4i| = \boxed{8}$

$AB = |b - a| = |-4\sqrt{3} + 4i + 4\sqrt{3} + 4i| = |8i| = \boxed{8}$

Comme $OA = OB = AB$, le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3) D est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc $d - z_0 = e^{\frac{i\pi}{3}}(c - z_0)$ donc

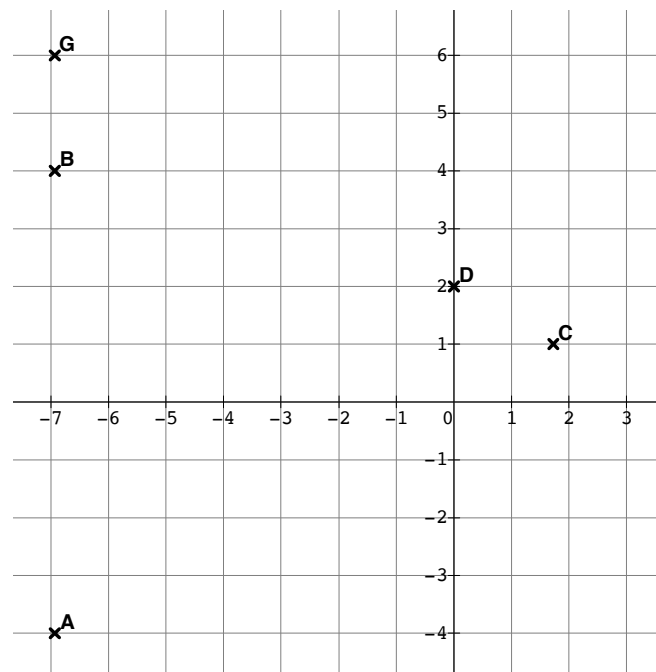
$d = e^{\frac{i\pi}{3}}c = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times (\sqrt{3} + i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{2i}$

4)

a. G est le barycentre de $(O; -1)$, $(B; 1)$ et $(D; 1)$ ($-1 + 1 + 1 \neq 0$) donc

$g = \frac{-z_0 + b + d}{-1 + 1 + 1} = b + d = -4\sqrt{3} + 4i + 2i = \boxed{-4\sqrt{3} + 6i}$

b. Graphique



c. Affixe de $\overrightarrow{OB} : b - z_0 = -4\sqrt{3} + 4i$

Affixe de $\overrightarrow{DG} : g - d = -4\sqrt{3} + 6i - 2i = -4\sqrt{3} + 4i$

Donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DG}$ et $OBGD$ est un parallélogramme.

5)

a.

$\frac{c - g}{a - g} = \frac{\sqrt{3} + i + 4\sqrt{3} - 6i}{-4\sqrt{3} - 4i + 4\sqrt{3} - 6i} = \frac{(5\sqrt{3} - 5i) \times i}{(-10i) \times i} = \frac{5i\sqrt{3} + 5}{10} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

b. $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ or

$(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC}) = \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}} \quad [2\pi] \quad \frac{GC}{GA} = \frac{|c-g|}{|a-g|} = \left|\frac{c-g}{a-g}\right| = \boxed{1}$

On en déduit que $GC = GA$ donc le triangle AGC est isocèle en G et comme $(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$, on en déduit que AGC est un triangle équilatéral.

Sujet n°4 : Asie – juin 2009

1) $ODCA$ est un carré direct ce qui signifie que A est l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour calculer l'affixe d de D , nous utilisons donc : $a = e^{\frac{i\pi}{2}}d$ soit : $d = \frac{a}{i} = \frac{1}{i} = \boxed{-i}$.

Par ailleurs, C est l'image de O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $c - a = e^{\frac{i\pi}{2}}(0 - a)$ et alors : $c = i \times (-1) + 1 = \boxed{1 - i}$.

2)

a. On note M un point du plan d'affixe z et M' d'affixe z' son image par r .

Alors $r(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_0 = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - z_0) \Leftrightarrow \boxed{z' = iz}$

b. $OBEF$ est un carré direct donc F est l'image de B par r donc $\boxed{f = r(b) = ib}$.

c. $OBEF$ est un carré donc $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BE}$ et alors : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$

L'affixe e de E est donc égale à $b + f$ soit à $\boxed{b + ib}$

3) $OFGD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DG}$. Au niveau des affixes, cela donne :

$$f = g - d \Leftrightarrow g = f + d = ib - i = \boxed{i(b - 1)}$$

4) Comme $c \neq g$:

$$\frac{e - g}{c - g} = \frac{b + ib - ib + i}{1 - i - ib + i} = \frac{b + i}{1 - ib} = \frac{i\left(\frac{b}{i} + 1\right)}{1 - ib} = i \frac{-ib + 1}{1 - ib} = \boxed{i}$$

On en déduit que $\left|\frac{e-g}{c-g}\right| = 1$ or $\left|\frac{e-g}{c-g}\right| = \frac{GE}{GC}$ donc $GE = GC$ et le triangle EGC est isocèle. De plus,

$$(\overrightarrow{GC}; \overrightarrow{GE}) = \arg\left(\frac{e - g}{c - g}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ donc, } \boxed{GCE \text{ est un triangle rectangle isocèle direct}}$$

Sujet n°5 : Liban – mai 2011**Partie A**

$\frac{z}{z'}$ et z' sont deux nombres complexes non nuls donc $\arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right) = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z')$ à 2π près en utilisant le pré-requis. Or $\frac{z}{z'} \times z' = z$ d'où $\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z')$ à 2π près.

On en déduit $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

Partie B

1) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$ donc $z_A = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ et en notant θ un argument de z_A , on a

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ et on en déduit } \boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}}$$

2)

a.

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + \sqrt{3} + i + 2i + \sqrt{3}i - 1}{2} = \boxed{\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i(3 + \sqrt{3})}{2}}$$

$$\text{b. } (1 + \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{3}} = (1 + \sqrt{3})\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i(3 + \sqrt{3})}{2} = \frac{z_B}{z_A}$$

c. A l'aide des résultats de la question 1, on a $z_A = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ or

$$z_B = z_A(1 + \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}(1 + \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \boxed{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{12}}}$$

Ce qui est bien la forme exponentielle de z_B car $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$ est un réel strictement positif.

3) La notation complexe de r est : $z' - z_0 = e^{-\frac{i\pi}{6}}(z - z_0)$ et comme $z_0 = 0$, on a $z' = e^{-\frac{i\pi}{6}}z$.

a. En notant z_{B_1} l'affixe de B_1 , on a $z_{B_1} = e^{-\frac{i\pi}{6}}z_B = e^{-\frac{i\pi}{6}} \times \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{12}} = \boxed{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{-\frac{i\pi}{12}}}$

b. L'affixe du point B_1 est le conjugué de l'affixe du point B car ils ont le même module et un argument opposé donc B_1 est le symétrique de B par rapport à l'axe des réels donc à l'axe $(O; \vec{u})$.

4)

a. D'après la question précédente, B_1 est l'image de B par la rotation r et comme B_1 et B sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$, nous obtenons $B' = B$ donc $\boxed{B \in (E)}$.
Par ailleurs, l'image de O par la rotation r dont le centre est O est O . Son symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ est aussi O et donc $O' = O$ et $\boxed{O \in (E)}$

b. z a pour forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$. L'affixe z_1 du point M_1 est égale à $z_1 = e^{-\frac{i\pi}{6}} \times \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$
Le point M' , symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ a pour affixe le conjugué de z_1 à savoir :

$$\boxed{s' = \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)}}$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)} \Leftrightarrow \frac{e^{i\theta}}{e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)}} = 1 \Leftrightarrow e^{i(2\theta - \frac{\pi}{6})} = 1 \Leftrightarrow 2\theta - \frac{\pi}{6} = 0 + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

c. L'ensemble des points M d'affixe $\rho e^{i(\frac{\pi}{12} + k\pi)}$ avec ρ un réel strictement positif et $k \in \mathbb{Z}$ est une droite privée du point O .

Par ailleurs, nous avons supposé que M est distinct de O et $O \in (E)$ donc $\boxed{(E) \text{ est la droite } (OB)}$.