



f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = 0,15x^5 - 2x^3 + 12x + 200.$$

1.a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.b. Déterminer la fonction dérivée f' de f .

2.a. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.b. Déterminer la fonction dérivée f'' de f' . On dit que f'' est la dérivée seconde de la fonction f .

3.a. Étudier le signe de $f''(x)$, puis dresser le tableau de variations de f' .

3.b. Déterminer le signe de $f'(x)$.

3.c. En déduire le sens de variation de la fonction f .

$$f(x) = 0,15x^5 - 2x^3 + 12x + 200$$

1 a f est dérivable sur $\mathbb{R}$
en tant que fonction polynôme.

$$1.b. \quad f'(x) = 0,15 \times 5x^4 - 2 \times 3x^2 + 12$$

$$f'(x) = 0,75x^4 - 6x^2 + 12$$

2. a. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$
en tant que fonction polynôme.

$$2. b. f''(x) = 0,75 \times 4x^3 - 6 \times 2x$$

$$f''(x) = 3x^3 - 12x$$

3. a. factorisons $f''(x)$:

$$f''(x) = 3x(x^2 - 4)$$

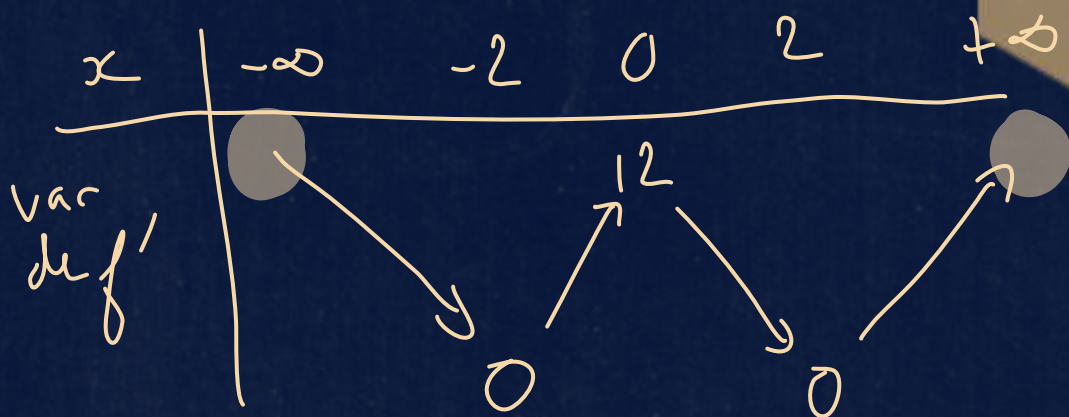
$$= 3x(x^2 - 2^2)$$

$$= 3x(x+2)(x-2)$$

Tracons le tableau de signes de $f''(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$3x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

f'' est la dérivée de f'



$$f'(x) = 0,75x^4 - 6x^2 + 12$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 0,75 \times (-2)^4 - 6 \times (-2)^2 + 12 \\ &= 0,75 \times 16 - 6 \times 4 + 12 \\ &= 12 - 24 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$f'(0) = 12$$

$$f'(2) = ? \quad f'(2) = f'(-2) = 0$$

$$f' \text{ est paire : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = f'(x)$$

3.b. Signe de $f'(x)$?

D'après la question 3a :

- Sur $] -\infty; -2]$ f' est strictement décroissante et

$$f'(-2) = 0 \text{ donc } \forall x \in] -\infty; -2]$$

$$x \leq -2 \text{ donc } f'(x) \geq 0$$

- Sur $[-2; 0]$, f' est strictement croissante et

$$f'(-2) = 0 \text{ donc } \forall x \in [-2; 0] \quad f'(x) \geq 0$$

- Sur $[0; 2]$, f' est strictement décroissante et

$$f'(2) = 0 \text{ donc } \forall x \in [0; 2] \quad f'(x) \geq 0$$

- Sur $[2; +\infty[$, f' est strictement croissante et

$$f'(2) = 0 \text{ donc } \forall x \in [2; +\infty[\quad f'(x) \geq 0$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	$\emptyset$	+	$\emptyset$	+

3.c À l'aide du tableau de signes de $f'(x)$, on déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
var de f		

$$a \leq \text{pH} \leq b$$

$$a \leq -\log[\text{H}_3\text{O}^+] \leq b$$

$$\begin{array}{l} \times -1 \\ \downarrow \\ -a \geq \log[\text{H}_3\text{O}^+] \geq -b \end{array}$$

$$x \mapsto 10^x \searrow \quad 10^{-a} \geq 10^{\text{pH}(\text{H}_3\text{O}^+)} \geq 10^{-b}$$

car la fonction $x \mapsto 10^x$
est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$10^{-a} \geq [\text{H}_3\text{O}^+] \geq 10^{-b}$$

$$10^{-b} \leq [\text{H}_3\text{O}^+] \leq 10^{-a}$$

2 On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule. Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[30; 130]$ par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2}$$

où x est exprimé en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $f(x)$ est exprimé en litre pour 100 km.

a. Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, quelle est sa consommation ? Et lorsque'il roule à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

b. Montrer que la dérivée f' de f sur l'intervalle $[30; 130]$ peut s'écrire

$$f'(x) = \frac{800x - 60000}{x^3}$$

a. Il s'agit de calculer $f(30)$:

$$f(30) = \frac{8 \times 30^2 - 800 \times 30 + 36000}{30^2}$$

$$= \frac{\cancel{30} [8 \times 30 - 800 + 1000]}{\cancel{30} \times 30}$$

$$= 8 - \frac{80}{3} + \frac{100}{3}$$

$$= \frac{44}{3} \text{ soit environ } 14,7 \text{ l pour } 100 \text{ km.}$$

Suivant ce modèle, la consommation est de 14,7 l par 100 km lorsque le véhicule roule à 30 km.h⁻¹.

De même, calculons $f(50)$:

$$f(50) = \frac{8 \times 50^2 - 800 \times 50 + 30900}{50^2}$$

$$= 4$$

Donc lorsque le véhicule roule à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, il consomme 4 l par 100 km.

b. f est dérivable sur $[30; 130]$

comme quotient de fonctions dérivables sur $[30; 130]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[30; 130]$.

$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2}$$

f est de la forme $\frac{u}{v}$

avec $u(x) = 8x^2 - 800x + 30000$

$$u'(x) = 16x - 800$$

et $v(x) = x^2$

$$v'(x) = 2x$$

donc f' est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{(16x - 800)x^2 - (8x^2 - 800x + 30000) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x} [16x^2 - 800x - (16x^2 - 1600x + 60000)]}{\cancel{x} x^3}$$

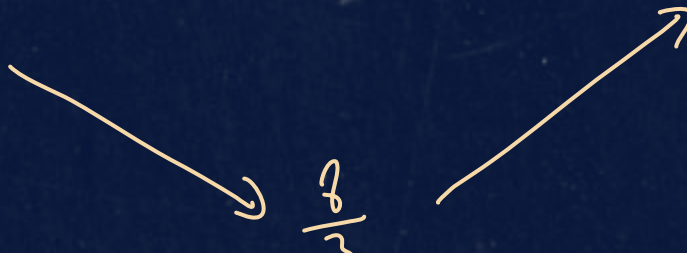
$$= \frac{\cancel{16x^2} - 800x - \cancel{16x^2} + 1600x - 60000}{x^3}$$

$$= \frac{800x - 60000}{x^3}$$

c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30, 130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

d. Pour quelle valeur la consommation est-elle minimale? Que vaut cette consommation? Arrondir au centième.

$$f'(x) = \frac{800x - 60000}{x^3}$$

x	30	75	130
$800x - 60000$	-	0	+
x^3	+		+
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Var de f			

$$\frac{8}{3}$$

Résolvons $800x - 60000 \geq 0$

$$\cancel{800}x \geq \cancel{60000}$$

$$8x \geq 600$$

$$x \geq 75$$

(calculs $f(75)$):

$$f(75) = \frac{8 \times 75^2 - 800 \times 75 + 30000}{75^2}$$

$$= \frac{8}{3}$$

d. D'après le tableau de variations de

f , sur l'intervalle $[30; 130]$,

f admet un minimum en $x = 75$

de valeur $f(75) = \frac{8}{3}$

Donc la consommation du véhicule est minimale pour une vitesse de 75 km.h^{-1} . Cette consommation minimale vaut $\frac{8}{3} = 2,67 \text{ l par } 100 \text{ km}$ (arrondie au centième).

e. On considère l'algorithme ci-dessous.

$$x \leftarrow 30$$

$$y \leftarrow 14$$

Tant que $y > 4$

$$x \leftarrow x + 1$$

$$y \leftarrow \frac{2x^2 - 800x + 30000}{x^2}$$

Fir tant que

Quelle est la valeur de x obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme?
En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

$$x \leftarrow 30$$

$$y \leftarrow 14$$

tant que $y > 4$

$$x \leftarrow x + 1$$

$$y \leftarrow \frac{7x^2 - 800x + 70000}{x^2}$$

fin tant que.

condition
contraire

L'algorithme se termine lorsque $y \leq 4$
or dans l'algorithme $y = f(x)$, donc en sortie,
 x a la plus petite valeur entière telle que
 $f(x) \leq 4$. Donc $x = 50$.

Il faut rouler à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ pour que la
consommation passe en-dessous de $4 \text{ l} \text{ par } 100 \text{ km}$.