Feuille de révisions 2023

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer l'image de 1 par la fonction f. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
   $F(x) = x\cdot\ln x - \ln x$
   est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$ qu'on notera α.
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 2

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ d'équations respectives :

$x + y + z = 0 \quad ; \quad 2x + 3y + z - 4 = 0$

1. Montrer que l'instersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ est la droite (d) dont une représentation paramétrique est :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4 - 2t \\ y &=& 4 + t \\ z &=& t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$
2. Soit λ un nombre réel.
   On considère le plan $(\mathcal{P}_\lambda)$ d'équation :
   $(1-\lambda)\cdot(x+y+z) + \lambda\cdot(2x+3y+z-4) = 0$
   a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\,(1+\lambda\,;1+2\lambda\,;1)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P}_\lambda)$.
   b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$ sont confondus.
   c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$ sont perpendiculaires?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d'), intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_{-1})$.
   Montrer que les droites (d) et (d') sont confondus.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans lévaluation.*

   On considère le point $A\,(1\,;1\,;1)$.

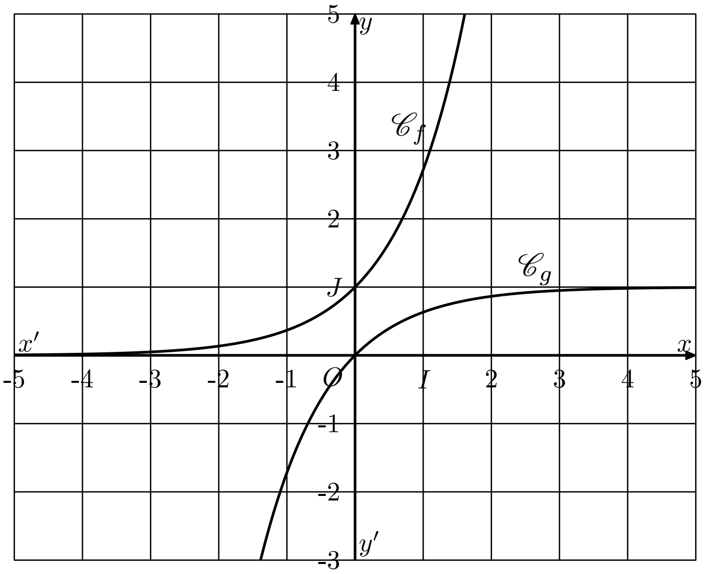
   Déterminer la distance du point A à la droite (d), c'est à dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite (d).

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$f(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont fournies dans la figure ci-dessous :



Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure ci-dessus.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b.

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
   c. En déduire que : $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation :
   $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1$

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.

A l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontrer l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie **B**.

On note E le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (*α est le nombre réel défini dans la partie* **C**).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

Exercice 4

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face.
Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1

```
Fonction f(n)
    a ← 0
    b ← 0
    Pour i allant de 1 à n faire
        d ← d'un entier
           aléatoire compris entre 1 et 6
        Si  d⩽ 2
            Alors a ←  1−a
            Sinon
                Si  d⩽ 4
                    Alors b ←  1−b
                Fin Si
        Fin Si
        s ←  a+b
    Fin Pour
    Renvoyer s
```

   a. On appelle la fonction `f` avec pour argument `n`$=3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.
   Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1^{er} passage boucle Pour					
2^e passage boucle Pour					
3^e passage boucle Pour					

   b. L'appel à la fonction `f` permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile?

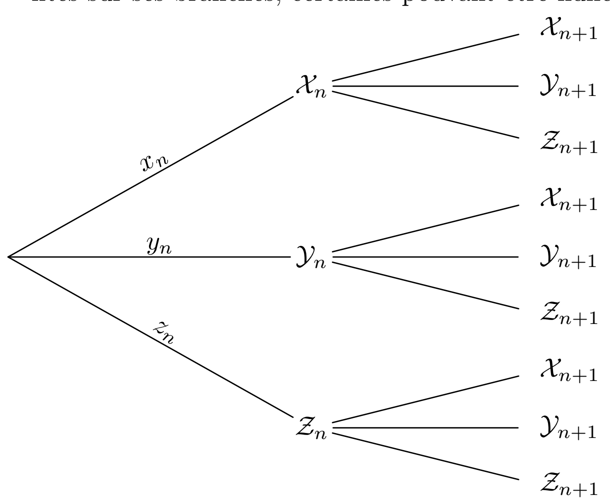
2. Pour tout entier naturel n, on note :
   - $\mathcal{X}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face*"
   - $\mathcal{Y}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face*"
   - $\mathcal{Z}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile*".

   De plus on note, $x_n=\mathcal{P}(\mathcal{X}_n)$, $y_n=\mathcal{P}(\mathcal{Y}_n)$ et $z_n=\mathcal{P}(\mathcal{Z}_n)$ les probabilités respectives des évènements $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$ et $\mathcal{Z}_n$:

   a. Donner les probabilités x_0, y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

   b. Justifier que : $\mathcal{P}_{\mathcal{X}_n}(\mathcal{X}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$

   c. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



   d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, :
   $$y_{n+1} = -\frac{1}{3} \cdot y_n + \frac{2}{3}$$

   f. On pose, pour tout entier naturel n : $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$
   Montrer que la suite (b_n) est géométrique.
   En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $$y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

   g. Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} y_n$.
   Interpréter le résultat.