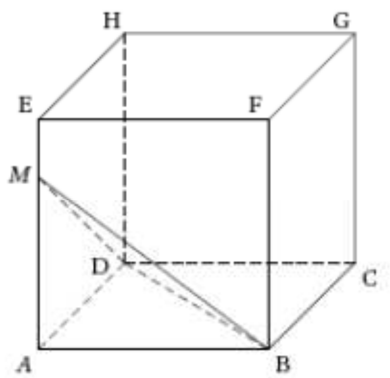
Sujets de bac : Géométrie dans l'espace – 1

Sujet n°1 : La Réunion – juin 2003

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

1) Déterminer le volume du tétraèdre $ABDM$ en fonction de a.
2) Soit K le barycentre du système de points pondérés : $\{(M; a^2),\ (B; 1)\ ,\ (D; 1)\}$
   a. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.
   b. Calculer $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = 0$.
   c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$.
   d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.
3) Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
4)
   a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.
   b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



Sujet n°2 : Polynésie – septembre 1998

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, nous considérons les points $A(0; 6; 0)$, $B(0; 0; 8)$ et $C(4; 0; 8)$.

1)
   a. Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique $1\ cm$)
   b. Démontrer que :
- Les droites (BC) et (OA) sont orthogonales
- Les droites (CO) et (OA) sont orthogonales
- La droite (BC) est orthogonale au plan (OAB)
   c. Déterminer le volume en cm^3 du tétraèdre $OABC$
   d. Démontrer que les quatre points O, A, B et C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.
2) A tout réel k de l'intervalle ouvert $]0; 8[$, est associé le point $M(0; 0; k)$.

Le plan Π qui contient M et est orthogonal à (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P et Q.

   a. Déterminer la nature du quadrilatère $MNPQ$.
   b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k la droite (MP) est-elle orthogonale à (AC) ?
   c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k la distance PM est-elle minimale ?

Sujet n°3 : extrait de Liban – mai 2011

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on donne trois points :

$$A(1;2;-1)\ \ ;\ \ B(-3;-2;3) \text{ et } C(0;-2;-3)$$

1)
   a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2) Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$.

Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3) On appelle G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;2)$.
   a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2;0;-5)$.
   b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
   c. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).
4) Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
5) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

Sujet n°4 : France – septembre 2005

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$.

1) On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1;-2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x+2y-7=0$.
   a. Démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.
   b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1;4;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.
   c. Soit $A(5;-2;-1)$. Calculer la distance de A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance de A au plan $\mathcal{R}$.
   d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.
2)
   a. Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t;3-t;t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM. On note $\phi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Etudier les variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.
   c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Sujet n°5 : Centres étrangers – juin 2006

$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté ci-dessous.
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   a. Calculer les coordonnées de I.
   b. Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G?
3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k , ainsi qu'un plan P_k de la façon suivante :
• M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k}=k\overrightarrow{AG}$;
• P_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
•N_k est le point d'intersection du plan P_k et de la droite (BC).

1) Identifier $P_{\frac{1}{3}}$; $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$

2) Calcul des coordonnées de N_k.

   a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

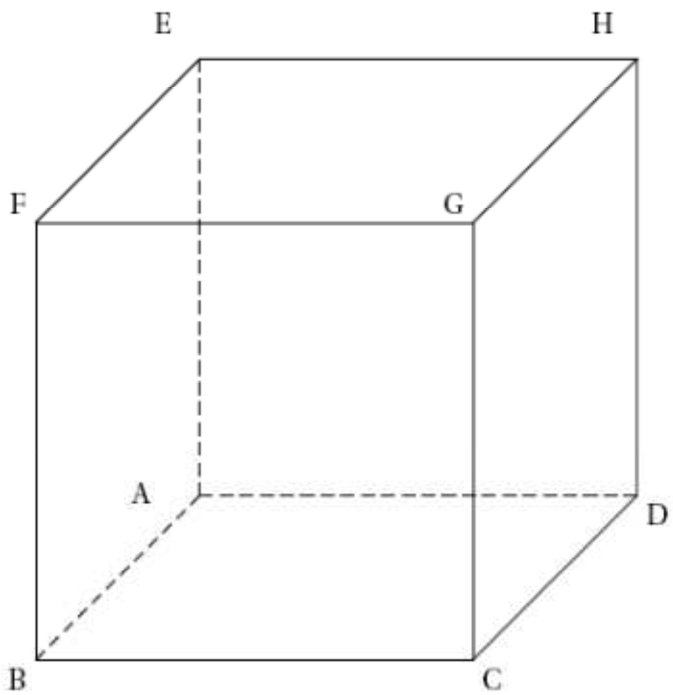
   b. Déterminer une équation du plan P_k dans ce repère.

   c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1; 3k-1; 0)$.

3) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale â la fois aux droites (AG) et (BC) ?

4) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

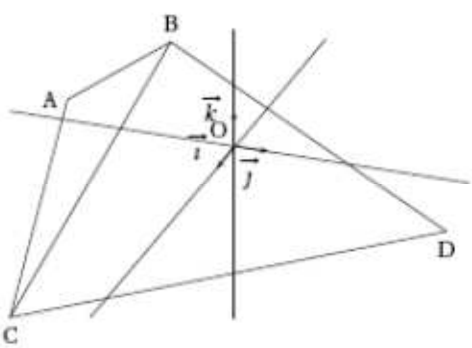
5) Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $P_{\frac{1}{2}}$. Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.



Sujet n°6 : extrait d'Asie –juin 2003

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $A(3; -2; 2)$; $B(6; 1; 5)$ et $C(6; -2; -1)$.



Partie A

1) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2) Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.

Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

3) Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par A. Déterminer une équation cartésienne de P'.

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées $(0; 4; -1)$.

Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
3) Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.
4)
   a. Calculer l'aire du triangle BDC.
   b. En déduire la distance du point A au plan (BDC).