

Correction sujets de bac : Géométrie dans l'espace – 1

Sujet n°1 : La Réunion – juin 2003

$$1) \mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{base} \times Hauteur = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABD} \times AM$$

Or ABD est un triangle rectangle isocèle en A avec $AB = AD = 1$ donc $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ unité d'aire.

De plus, $AM = \frac{1}{a} \times AE$ (car $a > 0$) donc $AM = \frac{1}{a}$.

Finalement $\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{6a}}$

2)

a. $a^2 + 2 \neq 0$ donc le barycentre K existe.

Par définition : $a^2 \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$. Or :

$$a^2 \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DK} = \vec{0} \Leftrightarrow a^2 (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}) + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BK} = \vec{0} \Leftrightarrow (a^2 + 2) \overrightarrow{BK} = -a^2 \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{DB}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD}}$$

b.

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2 + 2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM}$$

Or (AM) est orthogonale au plan (ABD) donc à toute droite de ce plan donc en particulier à (BD) donc $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

De même, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Finalement :

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2 + 2} AM^2 = \frac{a^2}{a^2 + 2} \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{a^2 + 2}}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{a^2 + 2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

Or (AD) est orthogonale au plan (ABM) donc à toute droite de ce plan et en particulier à (BM) donc $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

De même, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Finalement :

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2 + 2} AD^2 = \boxed{\frac{1}{a^2 + 2}}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{a^2 + 2} = \boxed{0}$$

c. On utilise la même méthode qu'à la question précédente :

$$\overrightarrow{DK} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{DM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{DB}$$

$$\text{On en déduit que } \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2 + 2} (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2 + 2} AM^2 = \frac{1}{a^2 + 2}$$

$$\text{et } \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{a^2 + 2} (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{a^2 + 2} AB^2 = \frac{1}{a^2 + 2}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DK} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{a^2 + 2} = \boxed{0}$$

d. D'après la question b, les droites (BK) et (MD) sont orthogonales. Or elles appartiennent au même plan (BDM) car K est un barycentre des trois points B, D et M donc elles sont perpendiculaires ce qui montre que (BK) est la hauteur issue de B dans le triangle BDM .

De même, d'après la question c, (DK) et (BM) sont perpendiculaires et donc (DK) est la hauteur issue de D dans le triangle BDM .

K est donc à l'intersection de deux hauteurs du triangle BDM c'est donc $\boxed{\text{l'orthocentre de } BDM}$.

$$3) \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}) \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 + 0 = 0$$

Car (AD) est orthogonale à (ABM) donc à (BM) .

$$\text{De même, } \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$$

On en déduit que (AK) est orthogonale à (MB) et à (MD) qui sont deux droites sécantes du plan (BDM) .

On en déduit que (AK) est orthogonale à (BDM) . $\boxed{\text{C'est donc la hauteur issue de } A \text{ dans le tétraèdre } ABDM}$.

4)

a. Dans le triangle ABM rectangle en A , à l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 1 + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 + 1}{a^2}$$

$$\text{De même, dans le triangle } ADM \text{ rectangle en } A, \text{ on obtient } DM^2 = AD^2 + AM^2 = \frac{a^2 + 1}{a^2}$$

On en déduit que $BM = DM$ et donc $\boxed{BDM \text{ est isocèle en } M}$.

De plus, $BD^2 = BA^2 + DA^2 = 1 + 1 = 2$ (on utilise le théorème de Pythagore dans ABD rectangle en A).

Pour calculer l'aire du triangle BDM , nous pouvons calculer la hauteur h :

$$h^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = BM^2 \text{ ou encore } h^2 = \frac{a^2 + 1}{a^2} - \frac{2}{4} = \frac{2a^2 + 2 - a^2}{2a^2} = \frac{a^2 + 2}{2a^2} \text{ d'où } h = \sqrt{\frac{a^2 + 2}{2a^2}}$$

$$\mathcal{A}_{BDM} = \frac{h \times BD}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + 2}{2a^2}} \times \sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + 2}{a^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a}} \quad (\text{car } a > 0)$$

$$\text{b. } \mathcal{A}_{BDM} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 2} = 2a \Leftrightarrow a^2 + 2 = 4a^2 \quad \text{car tout est positif}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{a = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{Dans ce cas, } \mathcal{V} = \frac{1}{3} AK \times \mathcal{A}_{BDM} \text{ et donc } \frac{1}{3} AK = \frac{1}{6a} \text{ ou encore } AK = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

Sujet n°2 : Polynésie – septembre 1998

1)

a.

$$\text{b. } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = 0 \text{ donc } (BC) \text{ et } (BA) \text{ sont orthogonales.}$$

$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ donc } (CO) \text{ et } (OA) \text{ sont orthogonales.}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ donc } (BC) \text{ et } (OA) \text{ sont orthogonales. Donc } (BC) \text{ est orthogonale à deux droites}$$

sécantes de (OAB) (en effet $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{OA}$ ne sont pas colinéaires) donc (BC) est orthogonal au plan (AOB) .

c. (BC) est donc la hauteur issue de C du tétraèdre $OABC$.

$$\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} BC \times \mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{OA \times OB}{2} = \frac{2}{3} \times 6 \times 8 = 32 \text{ cm}^3$$

d. Soit M le centre de la sphère à laquelle appartient les points O, A, B et C .

Comme $OM = AM$, on a que M appartient au plan médiateur de $[OA]$ qui a pour équation $y = 3$ (plan parallèle à (xOz)). De plus, M appartient aussi au plan médiateur de $[OB]$ qui a pour équation $z = 4$.

Pour finir M appartient au plan médiateur de $[OC]$ qui a pour équation $x + 2z - 10 = 0$.

On trouve donc $x = 10 - 2z = 2$. Finalement $M(2; 3; 4)$.

$$\text{On vérifie } AM = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}; BM = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}; CM = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

Et $OM = \sqrt{29}$. Donc O, A, B et C appartiennent à une sphère de centre $M(2; 3; 4)$ et de rayon $\sqrt{29}$.

2)

$$\text{a. } M(0; 0; k). \text{ Déterminons une équation de } \Pi : \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ est normal à } \Pi \text{ donc une équation de } \Pi \text{ est}$$

$$8z + d = 0. \text{ Or } M \in \Pi \text{ donc } 8k + d = 0 \text{ et } d = -8k. \text{ Une équation de } \Pi \text{ est donc } 8z - 8k = 0 \text{ ou encore } z = k.$$

$$\text{Coordonnées de } N : (OC) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ donc } 2t = k \text{ et } N\left(\frac{k}{2}; 0; k\right)$$

$$\text{Coordonnées de } P : (AC) : \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = -6t \\ z = 8 + 8t \end{cases} \text{ donc } 8 + 8t = k \text{ et } t = \frac{k}{8} - 1 \text{ d'où } P\left(\frac{k}{2}; 6 - \frac{3k}{4}; k\right)$$

$$\text{Coordonnées de } Q : (AB) : \begin{cases} x = 0 \\ y = -6t \\ z = 8 + 8t \end{cases} \text{ donc } t = \frac{k}{8} - 1 \text{ d'où } Q\left(0; 6 - \frac{3k}{4}; k\right)$$

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{QP} \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc ces vecteurs sont égaux et } MNPQ \text{ est un parallélogramme.}$$

$$b. \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ 6 - \frac{3k}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \text{ donc } (PM) \text{ est orthogonale à } (OB).$$

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ 6 - \frac{3k}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2k - 36 + \frac{9k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{72}{13}$$

Pour $k = \frac{72}{13}$ les droites (PM) et (AC) sont également orthogonales.

$$c. MP = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(6 - \frac{3k}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{k^2}{4} + 36 - 9k + \frac{9k^2}{16}} = \sqrt{\frac{13k^2}{16} - 9k + 36}$$

$$\text{Donc } MP^2 = \frac{13k^2}{16} - 9k + 36.$$

La distance MP est minimale quand MP^2 est minimal car une longueur est positive.

Or MP^2 est un polynôme du second degré qui est minimal pour $k = \frac{9}{2 \times \frac{13}{16}} = 9 \times \frac{16}{2 \times 13} = \frac{72}{13}$.

Donc la longueur PM est minimale quand (MP) et (AC) sont orthogonales.

Sujet n°3 : extrait de Liban – mai 2011

1)

$$a. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ Ces vecteurs ne sont clairement pas colinéaires (même ordonnée mais pas la}$$

même abscisse) donc A, B et C ne sont pas alignés.

$$2) \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -4 \times 2 + (-4) \times (-1) + 4 \times 1 = -8 + 4 + 4 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux.}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = -1 \times 2 + (-4) \times (-1) + (-2) \times 1 = -2 + 4 - 2 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AC} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux.}$$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) alors $\vec{n}$ est normal à (ABC) .

$$3) \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est normal à } (P)$$

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et comme $\vec{u}$ est normal à (P) et que $\vec{n}$ est normal à (ABC) alors (P) et (ABC) sont orthogonaux.

4) On appelle G le barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$.

$$a. x_G = \frac{x_A - x_B + 2x_C}{1 - 1 + 2} = \frac{1 + 3 + 0}{2} = 2; y_G = \frac{2 + 2 - 4}{2} = 0 \text{ et } z_G = \frac{-1 - 3 - 6}{2} = -5 \text{ donc } \boxed{G(2; 0; -5)}$$

$$b. \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CG} = 2\vec{u} \text{ et donc } \overrightarrow{CG} \text{ est normal à } (P) \text{ ce qui montre que } (CG) \text{ et } (P) \text{ sont}$$

orthogonaux.

$$c. H \in (CG) \text{ donc il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{CH} = t\overrightarrow{CG} \text{ donc } \begin{cases} x - 0 = t \\ y + 2 = t \\ z + 3 = -t \end{cases} \text{ et les coordonnées de } H \text{ sont}$$

$(t; t - 2; -t - 3)$. Comme $H \in (P)$, on a aussi : $x + y - z + 2 = 0$ et donc

$$t + (t - 2) - (-t - 3) + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t = -3 \Leftrightarrow t = -1 \text{ donc } \boxed{H(-1; -3; -2)}$$

5) Comme G est le barycentre de $(A; 1)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$, on a $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$ d'où

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = 12 \Leftrightarrow MG = 6$$

S est donc une sphère de centre G et de rayon 6.

6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S) .

L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle ou l'ensemble vide.

$d(G; (P)) = \frac{|2 + 0 + 5 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ et comme cette distance est inférieure au rayon de la sphère, l'intersection de (P) et (S) est un cercle. Le centre de ce cercle est le point H qui est le projeté orthogonal de G sur (P) .

Pour calculer le rayon du cercle, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle GHM où M est un point du cercle. GHM est rectangle en H et $GH = d(G; (P)) = 3\sqrt{3}$; $GM = 6$ car M appartient à l'intersection de (P) et (S)

donc en particulier, c'est un point de la sphère.

On a donc $MH^2 + GH^2 = GM^2$ ou encore $MH^2 = GM^2 - GH^2 = 6^2 - (3\sqrt{3})^2 = 36 - 27 = 9$ d'où $MH = \sqrt{9} = 3$. Le rayon du cercle est donc 3.

Sujet n°4 : France – septembre 2005

1)

a. $\mathcal{R}$ a pour équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$ donc $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{R}$.

$\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}_1$ sont orthogonaux et les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

b. Déterminons l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$. Comme $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, une équation est de la forme $-2x + y + 5z + d = 0$. Or $B \in \mathcal{P}$ donc $-2 \times 1 + 1 \times (-2) + 5 \times 1 + d = 0$ soit $d = -1$. Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $-2x + y + 5z - 1 = 0$.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(7 - 2y) + y + 5z - 1 = 0 \\ x = 7 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y + 5z - 15 = 0 \\ x = 7 - 2y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - y \\ x = 7 - 2y \end{cases}$ donc, en posant $y = -t$, on trouve $x = 7 + 2t$ et $z = 3 + t$. Une représentation paramétrique de

la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est donc $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

de Δ qui de plus passe par C car, pour $t = -4$, on trouve $\begin{cases} x = 7 - 8 = -1 \\ y = 4 \\ z = 3 - 4 = -1 \end{cases}$.

$$c. d(A; \mathcal{P}) = \frac{|-2 \times 5 + (-2) + 5 \times (-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d(A; \mathcal{R}) = \frac{|5 + 2 \times (-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

d. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ et I le projeté orthogonal de A sur Δ . Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires, le triangle AHI est rectangle en H donc $AI^2 = AH^2 + HI^2$ or AI est la distance de A à Δ , AH est la distance de A au plan $\mathcal{P}$ et HI est égale à la distance de A au plan $\mathcal{R}$. D'où :

$$AI^2 = \left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{9 \times 30}{25} + \frac{36 \times 5}{25} = \frac{54 + 36}{5} = 18 \text{ et donc } AI = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

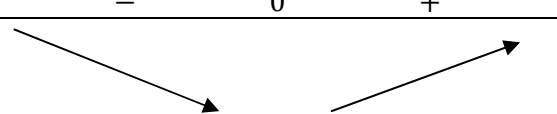
2)

a. On considère $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2t - 4 \\ 5 - t \\ t + 1 \end{pmatrix}$ donc $AM = \sqrt{(2t - 4)^2 + (5 - t)^2 + (t + 1)^2} = \sqrt{6t^2 - 24t + 42}$

b. On considère la fonction $\phi: t \mapsto \sqrt{6t^2 - 24t + 42}$ définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant de $6t^2 - 24t + 42$ est strictement négatif donc ce polynôme est strictement du signe de $a = 6$.

ϕ est la composée d'une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive et de la fonction racine carrée qui est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x) = \frac{12t - 24}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{6t - 12}{\sqrt{6t^2 - 24t + 42}}$

Donc ϕ' est du signe de $6t - 12$ car son dénominateur est strictement positif donc :

t	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $\phi'(x)$		0	
	-		+
Variations de ϕ			

ϕ admet donc un minimum en 2 et $\phi(2) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

c. On trouve AM minimal quand $t = 2$ donc pour le point $M_t(5; 1; 2)$ or ce point appartient à la droite

$$\Delta \text{ car } \begin{cases} 7 + 2t = 5 \\ -t = 1 \\ 3 + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases} \text{ . Donc } M_2 \text{ représente le projeté orthogonal de } A \text{ sur } \Delta.$$

Sujet n°5 : Centres étrangers – juin 2006

Partie A

1) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on a $A(0; 0; 0)$; $B(1; 0; 0)$; $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$.

$$BD = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \quad BE = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2} \quad DE = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

BDE a trois côtés de même longueur donc c'est un triangle équilatéral.

2)

a. I est l'isobarycentre de B, D et E donc

$$x_I = \frac{x_B + x_D + x_E}{3} = \frac{1}{3} \quad ; \quad y_I = \frac{1}{3} \quad ; \quad z_I = \frac{1}{3} \quad \text{donc } I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

b. $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et G a pour coordonnées $(1; 1; 1)$ donc $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ et on a bien $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires et donc que les points A, I et G sont alignés.

3) Comme I appartient au plan (BDE) , pour démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (BDE) , il suffit de vérifier que $\overrightarrow{AI}$ est un vecteur normal au plan (BDE) et pour cela, montrer que $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (BDE) .

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 0 \quad \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0$$

Donc I est bien le projeté orthogonal de A sur (BDE) .

Partie B

1) $M_{\frac{1}{3}}$ est défini par $\overrightarrow{AM_{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ or $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ donc $\boxed{M_{\frac{1}{3}} = I}$; $P_{\frac{1}{3}}$ est donc le plan passant par I et parallèle au plan (BDE) or $I \in (BDE)$ donc $\boxed{P_{\frac{1}{3}} = (BDE)}$; $N_{\frac{1}{3}}$ est l'intersection du plan (BDE) et de la droite (BC) . Il est bien évident que ce point d'intersection est le point B donc $\boxed{N_{\frac{1}{3}} = B}$

$$M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}} = IB = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

2)

a. M_k est définie par $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$ donc $\begin{cases} x_k = k \\ y_k = k \\ z_k = k \end{cases}$ d'où $\boxed{M_k(k; k; k)}$

b. P_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) donc un vecteur normal à (BDE) est également un vecteur normal à P_k . Or d'après la première partie (AI) et donc (AG) est une droite perpendiculaire à (BDE) donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P_k donc une équation est alors de la forme $x + y + z + d = 0$.

Or $M_k \in P_k$ donc $k + k + k + d = 0$ donc $d = -3k$ et une équation de P_k est $\boxed{x + y + z - 3k = 0}$

c. N_k est l'intersection de P_k et de (BC) donc N_k a des coordonnées de la forme $(x; y; 3k - x - y)$ et comme N_k appartient à (BC) , les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN_k}$ sont colinéaires.

$$\text{Or } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BN_k}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ 3k-x-y \end{pmatrix} \text{ donc il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{BN_k} = t\overrightarrow{BC} \text{ et donc } \begin{cases} x-1 = 0 \\ y = t \\ 3k-x-y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ y = 3k - 1 \end{cases} \quad \text{On en déduit } z = 3k - x - y = 3k - 1 - (3k - 1) = 0$$

Les coordonnées de N_k sont donc : $\boxed{(1; 3k - 1; 0)}$

3) $(M_k N_k)$ orthogonale à (BC) et (AG)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_k N_k} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \\ \overrightarrow{M_k N_k} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1) + (k-3k+1) + k = 0 \\ k-3k+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc si $k = \frac{1}{2}$ alors (AG) et (BC) sont orthogonales à $(M_k N_k)$.

$$4) M_k N_k = \sqrt{(k-1)^2 + (-2k+1)^2 + k^2} = \sqrt{4k^2 - 6k + 2}$$

Comme $M_k N_k$ est positif et que la fonction racine carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $M_k N_k$ est minimale quand $M_k N_k^2$ est minimale donc quand $4k^2 - 6k + 2$ est minimale. Or ceci se produit pour $k = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Donc $M_k N_k$ est minimal pour $\boxed{k = \frac{3}{4}}$

5) $M_{\frac{1}{2}}$ est le milieu de $[AG]$; $N_{\frac{1}{2}}$ est le milieu de $[BC]$

On sait que $N_{\frac{1}{2}}$ appartient au plan $P_{\frac{1}{2}}$. De plus (BDE) et $P_{\frac{1}{2}}$ sont parallèles donc les intersections de ces deux plans avec un troisième plan sont des droites parallèles. Ceci nous permet de tracer l'intersection de $P_{\frac{1}{2}}$ avec la face $ABCD$ car on trace la parallèle à (BD) passant par $N_{\frac{1}{2}}$. Et ainsi de suite, on trace des segments qui joignent le milieu d'arêtes et qui sont parallèles soit à (BD) , soit à (BE) , soit à (DE) .
On obtient un hexagone régulier.

Sujet n°6 : extrait d'Asie – juin 2003

Partie A

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 9 + 0 - 9 = 0$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et $\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle en } A.}$

$$2) \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } P. \text{ On remarque que } \overrightarrow{AB} = 3\vec{n} \text{ donc } \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires et donc } \overrightarrow{AB} \text{ est un}$$

vecteur normal à P .

De plus : $3 - 2 + 2 - 3 = 0$ donc $A \in P$. $\boxed{P \text{ est donc bien le plan normal à } (AB) \text{ passant par } A.}$

$$3) \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } P' \text{ car } (AC) \text{ est orthogonale à } P' \text{ donc une équation cartésienne de } P' \text{ est}$$

$3x - 3z + d = 0$. De plus A appartient à P' donc $3 \times 3 - 3 \times 2 + d = 0$ d'où $d = -3$.

Une équation cartésienne de P' est donc $3x - 3z - 3 = 0$ ou encore $\boxed{x - z - 1 = 0}$

Partie B

$$1) \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \times 3 + 6 \times 3 - 3 \times 3 = -9 + 18 - 9 = 0$$

Et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 3 + 0 - 3 \times (-3) = -9 + 9 = 0$ donc $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\boxed{(AD) \text{ est perpendiculaire au plan } (ABC).}$

2) AD représente donc une hauteur du tétraèdre $ABCD$ et la base correspondante est le triangle rectangle ABC .

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times AD = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times AD = \frac{1}{6} \times AB \times AC \times AD$$

Or $AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$; $AC = \sqrt{3^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $AD = \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}$ donc

$$V = \frac{1}{6} (3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}) = \boxed{27}$$

$$3) \quad \overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 36 + 18 + 0 = 54$$

$$\text{Or } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC}) = \sqrt{36 + 9 + 36} \times \sqrt{36 + 36 + 0} \times \cos(\widehat{BDC}) = 9 \times 6\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BDC})$$

$$\text{Donc } \cos(\widehat{BDC}) = \frac{54}{54\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et donc } \boxed{\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4} \text{ radian.}}$$

4)

a. On note H le projeté orthogonal de B sur (DC) . Alors le triangle BDH est un triangle rectangle en H avec $\widehat{BDH} = \frac{\pi}{4}$ radian donc $BH = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times BD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 9$.

$$\mathcal{A}_{BDC} = \frac{BH \times DC}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times 6\sqrt{2} = \boxed{27}$$

b. Dans le tétraèdre $ABCD$, on peut considérer la hauteur issue de A et la base BCD et alors :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times d(A; (BCD)) \text{ d'où } d(A; (BCD)) = 27 \times \frac{3}{27} = \boxed{3}.$$