Exercice 1

Restitution organisée de connaissances :

On suppose que la fonction logarithme définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle.
Démontrer que pour tout $x \in]0\ ,\ +\infty[\ ,\ ln'(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

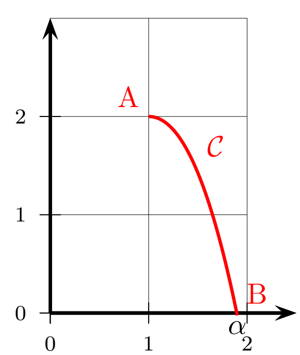
PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$
   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
   Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.
   a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$,

$$g(x) \geqslant \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}\ .$$



Exercice 3

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$, $P\left(1\ ;\ 0\ ;\ -\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
   En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. On considère la fonction 1 donné ci-dessous

Fonction 1

```
def fonction1(xm,ym,zm,xn,yn,zn,xp,yp,zp):
    d=xn-xm
    e=yn-ym
    f=zn-zm
    g=xp-xm
    h=yp-ym
    i=zp-zm
    k=d*g+e*h+f*i
    return  k
```

   a. Exécuter *à la main* cette fonction avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

   b. A quoi correspond le résultat renvoyé par la fonction ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4. On considère la fonction 2 donné en annexe. La compléter pour qu'elle teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.
5. On considère le vecteur $\vec{n}\,(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ normal au plan (MNP).

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

   b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

   a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\ ;\ \frac{24}{35}\ ;\ \frac{23}{35}\right)$.

   b. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
   Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

   où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Exercice 4

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2 000 clients, dont l'abonnement a plus de 12 mois d'ancienneté.

Parmi eux :

- 900 n'ont jamais subi de coupure prolongée de connexion.
- 500 clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion dans les 12 derniers mois.
- les autres clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an.

L'enquête révèle que :

- 95 % des clients n'ayant jamais subi de coupure prolongée se déclarent satisfaits du service fourni.
- 50 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion dans les douze derniers mois se déclarent satisfaits du service fourni.
- 70 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an se déclarent satisfaits du service fourni.

On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont été interrogés. On considère les évènements suivants :

J : « le client n'a jamais subi de coupure prolongée de connexion »

R : « la dernière coupure prolongée de connexion du client est survenue au cours des douze derniers mois » (elle est « récente »)

A : « la dernière coupure prolongée de connexion du client date d'il y a plus d'un an » (elle est « ancienne »)

S : « le client se déclare satisfait »

$\overline{S}$ désigne l'évènement contraire de S.

1. **a.** Calculer les probabilités des évènements J, R et A.

b. Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

2. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion.

3. Calculer la probabilité que le client choisi se déclare satisfait.

4. Le client choisi se déclare satisfait du service fourni. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième) ?

5. On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.

Déterminer la probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare non satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième). On justifiera soigneusement la réponse.

Exercice 5

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Partie A
Dans les questions 1 et 2, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2.$$

1. Soit a un nombre réel strictement positif. On a $v_0 = \ln(a)$.

a. $w_0 = \dfrac{1}{a^2} + 2$ **b.** $w_0 = \dfrac{1}{a^2 + 2}$
c. $w_0 = -2a + 2$ **d.** $w_0 = \dfrac{1}{-2a} + 2$

2. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a. décroissante et majorée par 3. **b.** décroissante et minorée par 2 .
c. croissante et majorée par 3 . **d.** croissante et minorée par 2.

3. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On peut affirmer que :

a. la suite (b_n) est croissante. **b.** la suite (b_n) est décroissante.
c. la suite (b_n) n'est pas monotone. **d.** le sens de variation de la suite (b_n) dépend de b_0.

Partie B On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - 3y + z - 5 = 0$.

4. Lequel de ces quatre points appartient au plan $\mathcal{P}$

a. $A(1, 1, 1)$ **b.** $B(2, -3, 1)$ **c.** $C(2, 1, 4)$ **d.** $D(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, 1)$

5. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4 + t \\ y &=& 6 + 2t \\ z &=& 4 - t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 8 + 5t' \\ y &=& 2 - 2t' \\ z &=& 8 + t' \end{array}\right., \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Ces droites sont :

a. sécantes **b.** confondues **c.** non coplanaires **d.** strictement parallèles

Partie C

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

6. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a. 0 **b.** 1 **c.** $0,24$ **d.** $0,76$

7. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

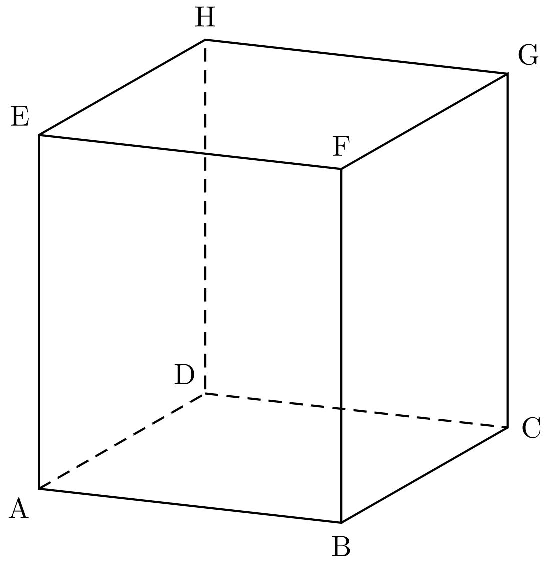
a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

8. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ **d.** $1 - P(X = 0)$

ANNEXE à remettre avec la copie



Fonction 2 à compléter sur l'annexe et à rendre avec la copie

```
def fonction2(xm,ym,zm,xn,yn,zn,xp,yp,zp):
    d=xn-xm
    e=yn-ym
    f=zn-zm
    g=xp-xm
    h=yp-ym
    i=zp-zm
    k=d*g+e*h+f*i
```