

Sujets de Bac : Equations différentielles

Sujet 1 : Amérique du Sud – novembre 2008

1) Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1) \quad (E')$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

soit une solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).

Résoudre l'équation (E').

3) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$$

4) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de h .

5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h et Γ celle de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Γ .

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Sujet 2 : Amérique du Sud – novembre 2007

1) On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi' = \phi$ et $\phi(0) = 1$. On considère un réel a .

a. Montrer que la fonction $f: x \mapsto e^{ax}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

b. On considère une fonction g solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de $y' = ay$.

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Sujet 3 : France – septembre 2005

On considère les deux équations différentielles définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' + (1 + \tan x)y = \cos x \qquad (E_0) \quad y' + y = 1$$

1) Déterminer les solutions de (E_0).

2) On considère deux fonctions f et g dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ telles que $f(x) = g(x) \cos x$.
Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0).

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.