Géométrie & Primitives

2 h calculatrice autorisée

Il sera tenu compte du soin apporté à la copie et de la qualité de la rédaction.

I Cours — 2 Points

Montrer que le projeté d'un point M sur un plan (P) est le point de (P) le plus proche de M.

II Exercice — 8 Points

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\,;\,1\,;\,4)$, $(4\,;\,-1\,;\,0)$, $(0\,;\,3\,;\,2)$ et $(4\,;\,3\,;\,-2)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2) Soit M un point de la droite (CD).

- **a)** Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
  Aide : Déduire de la question 1 la distance $BM = \phi(t)$ en fonction d'un paramètre t et chercher le minimum de $\phi(t)$ sur $\mathbb{R}$.
- **b)** On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3\,;\,3\,;\,-1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
- **c)** Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3)

- **a)** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
- **b)** Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
- **c)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
- **d)** Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

4) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

III Exercice — 3 Points

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$

1) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 2$ est solution de (E).

2) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire l'unique solution h telle que $h(2) = 0$.

IV Exercice — 4 Points

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x^2 - 4x$.

1) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' - 2y = 0$.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction u définie par $u(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de l'équation (E).

3) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

V Exercice 3 Points

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2}$ sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

2) $f(x) = 4x(x^2-1)^2$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$

3) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$

4) Bonus : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$ sur $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$